NAMUR
1960

4

Cybernetica

CYBERNETICA

est la revue de l'Association Internationale de Cybernétique
Elle paraît 4 fois par an.

is the review of the International Association for Cybernetics.
It is issued four times a year.

Prix et conditions de vente — Price and conditions of sale.

Abonnement annuel — *Yearly subscription :*

membres de l'Association	150,– F. B.
members of the Association	150,– F. B.
non-membres :	300,– F. B.
non-members :	300,– F. B.

Par numéro — *Each number :*

membres de l'Association	50,– F. B.
members of the Association	50,– F. B.
non-membres :	100,– F. B.
non-members :	100,– F. B.

Toute correspondance concernant la revue est à adresser à l'Association Internationale de Cybernétique, 13, rue Basse Marcelle, Namur (Belgique).

All correspondence concerning the review is to be sent to the International Association for Cybernetics, 13, *rue Basse Marcelle, Namur (Belgium).*

Secrétaire de Rédaction : M. Roger DETRY

CYBERNETICA

Volume III
N° 4 - 1960

Revue de l'Association Internationale de Cybernétique
Review of the International Association for Cybernetics

NAMUR

SOMMAIRE
CONTENTS

Le responsable, la recherche opérationnelle et l'attitude cybernétique

par
Suzanne BRESARD,
Conseiller de Synthèse
Georges GUÉRON,
Conseiller de Synthèse
et Maurice MEYLON,
Directeur de la Société de Recherche Appliquée

I

Si la cybernétique est « l'art de rendre efficace l'action » et si la recherche opérationnelle permet « la préparation scientifique des décisions », le « chef », qui décide ce que d'autres feront, doit avoir besoin de l'une et de l'autre.

Et d'autre part, ces disciplines, encore jeunes et dont les domaines respectifs, pas plus que la méthodologie, n'ont pu encore être délimités, sont, dans leur évolution rapide, très liées aux possibilités d'application qu'elles peuvent rencontrer. Les « chefs » en détiennent de nombreuses. Il peut donc être utile d'examiner si, dans la réalité, les problèmes, les attitudes et les méthodes se rencontrent aussi parfaitement que les formules le font supposer.

II

La recherche opérationnelle est un outil efficace dont dispose maintenant le «responsable» de toute action organisée et, notamment, le responsable de l'entreprise. Mais ce dernier, pour l'utiliser, a dû tout d'abord s'adapter aux strictes contraintes logiques qu'impose

son usage. La fonction fondamentale du chef d'entreprise ne peut certes pas être affectée par l'apparition d'un outil quelle qu'en soit la puissance : il reste toujours le « responsable », c'est-à-dire celui qui prend la décision, en supervise l'application et répond de ses résultats. Mais les procédures internes selon lesquelles s'exerce cette fonction fondamentale sont améliorées par la forme même de la recherche opérationnelle et la méthode qu'elle oblige impérativement à adopter. Ces procédures consistent en un certain nombre d'actions élémentaires, depuis longtemps décrites par les psychologues. L'emploi de la recherche opérationnelle conduit à effectuer scrupuleusement chacune de ces actions car il y a coïncidence entre leur succession et celle des différentes étapes caractéristiques d'une recherche opérationnelle.

Jusqu'à présent, il n'en était pas forcément ainsi et, dans un jeu plus global du mécanisme déterminant l'acte du responsable, certaines phases pouvaient être accomplies incomplètement ou même « sautées » sans que cela paraisse et sans qu'on puisse par conséquent discerner et encore moins chiffrer la perte conséquente d'efficacité. Ceci ne fut sans doute pas trop grave jusqu'au moment où l'évolution du monde a fait de l'entreprise moderne une « organisation » complexe et dépendante à laquelle le responsable ne peut plus s'identifier comme il pouvait le faire au temps où, sa fortune se confondant avec la prospérité des affaires mises en route sur sa décision, il ne lésait que lui-même si cette décision, mal préparée, avait été mal prise. Mais, actuellement, il n'en est plus ainsi : l'entreprise est devenue, en elle-même, une entité dont le responsable n'est plus finalement qu'un élément, un homme parmi d'autres hommes dont la sécurité et la satisfaction pèsent, dans la décision, du même poids que la sienne ; l'entreprise est par ailleurs, de plus en plus dépendante à l'intérieur d'un ensemble professionnel, social ou politique dont les intérêts doivent également être respectés. C'est dire que le but recherché est alors le maintien, dans une certaine relation harmonieuse, de tous ceux qui participent à un ensemble. C'est au fond la pérennité et la vitalité d'un organisme qu'il s'agit de maintenir dans un environnement en évolution et c'est une sorte de régulation générale qui est la condition du succès. Cette description d'un groupe social se rapporte aussi bien à une entreprise, à un service administratif, ou à tout autre entité. Elle suggère d'abord celle d'un être vivant, d'un être organisé, à l'intérieur duquel de nombreuses fonctions se commandent mutuellement et qui pratique sans cesse certains échanges avec le milieu extérieur, mais qui ressent cependant sa propre unité. Organisation et complexité y apparaissent ensemble

à l'observateur extérieur à un niveau très différent de celui des situations antérieures.

III

Un chef d'entreprise ne peut plus se permettre aujourd'hui de prendre une décision mal préparée et, pourtant, l'accroissement de l'organisation du monde et celui de la complexité des problèmes rendent cette préparation de plus en plus difficile. C'est sans doute pour cela qu'a été inventée la recherche opérationnelle.

Celle-ci a été définie un jour comme « l'ensemble des activités qu'exercent les membres de la Société Américaine de Recherche Opérationnelle ». Cette phrase semble une boutade et contient cependant une solide vérité : c'est que toutes ces personnes qui se sont groupées en société, ont en commun quelque chose d'assez profond, une certaine attitude qui imprègne leur action et qui fait qu'effectivement l'ensemble de leurs activités constitue de la recherche opérationnelle. Car celle-ci apparaît fondamentalement comme un état d'esprit : celui qui consiste à utiliser, pour la solution des problèmes, et jusqu'à l'extrême limite des possibilités, les ressources du raisonnement logique et donc la méthode scientifique expérimentale.

Or, si cet état d'esprit anime depuis fort longtemps les savants, les ingénieurs et les techniciens placés devant les phénomènes physiques, il semblait, jusqu'à une date récente, impossible à adopter par les chefs ou les économistes confrontés à des problème d'une autre nature. L'audace de la recherche opérationnelle tient à son ambition d'appliquer systématiquement la méthode scientifique dans le domaine des grands ensembles économiques, politiques et technico-sociaux. Mais il y a, à cette application, des limites inhérentes à la condition même de « l'outil ». Faire ressortir ces limites est important : pour y parvenir la meilleure méthode est de revenir à la description analytique que font les psychologues du mécanisme de la décision et d'examiner, pour chacune des actions successives ainsi définies, si la recherche opérationnelle peut intervenir et sous quelles formes elle prétend s'exercer.

Action I : la perception du problème

Le responsable se préoccupe tout d'abord de percevoir aussi exactement que possible le corps du problème, puis le critère de la décision, c'est-à-dire le but fondamental qu'il poursuit. Il s'agit là d'un choix initial, créant en quelque sorte le problème et qui

précède, en principe, toute étude logique systématique. Ce choix appartient au responsable qui disposera, pour le faire, de son expérience, de son intuition, de sa curiosité. Souvent, d'ailleurs, il ne se révèlera pas comme le meilleur et les études logiques qui se seront ensuite déroulées dans le cadre qu'il a tracé pourront faire apparaître qu'il n'est pas entièrement valable et qu'il faut donc le modifier. Ce mouvement dialectique entre la décision intuitive et la recherche logique, ce « programme dynamique » qui se développe entre ces deux aspects du problème, correspond d'ailleurs au processus normal de l'action dans le domaine considéré et montre bien que la recherche opérationnelle exige, dès le début, une collaboration intime entre le responsable et les spécialistes. C'est l'absence de cette union étroite qui est le principal élément des déboires qu'on a pu parfois constater.

Le corps du problème est une « boite noire » dont il est nécessaire de définir les entrées et de rendre possible l'observation des sorties. Par exemple, le titre « transports des produits finis par camions depuis les usines A, B, C jusqu'aux entrepôts a, b, c, d, e » peut constituer le corps d'un problème si les mêmes camions ne sont pas utilisés en même temps pour un autre usage ; car, si c'était le cas, l'un des facteurs d'entrée serait une autre boite noire et le problème cesserait d'être défini.

Le critère représente la « sortie globale » que l'on désire voir se réaliser. Dans beaucoup de problème industriels, le critère est la condition de minimisation d'un coût ou, ce qui revient au même, de maximation d'un rendement ou d'une rentabilité. Mais dans beaucoup d'autres cas, le critère peut être d'une tout autre nature. Dans une opération de décentralisation industrielle, par exemple, des critères de nature psycho-sociale s'imposeront dans le choix de la région où s'effectuera la décentralisation. Lorsqu'on étudie le problème du développement d'une région ou d'un pays, des critères de même ordre apparaissent également et la recherche porte sur la maximation d'une « fonction d'arbitrage politique » ou « fonction d'ophémilité » dont on peut dire qu'elle représente la « satisfaction » du plus grand nombre des individus intéressés ou touchés par les réformes envisagées.

ACTION II : LA RECHERCHE DES DONNÉES ET LA CRÉATION DU MODÈLE

Ayant défini le problème, le responsable doit mettre en évidence aussi finement et complètement que possible les différents faits et éléments réels qui le caractérisent, puis classer ces données dans

un certain nombre de catégories définies. Il lui faudra alors *réfléchir*, c'est-à-dire comparer les données entre elles, discerner en quoi elles se rapprochent ou diffèrent, les évaluer les unes par rapport aux autres, les situer dans un ensemble, supputer leur part d'influence ou d'efficacité. Il devra rompre ses routines intellectuelles, procéder à la fois à des hypothèses et à des simplifications, faire un véritable effort d'hygiène mentale.

Ici la recherche opérationnelle lui apportera une aide fondamentale en mettant à sa disposition toutes les ressources — peu connues et bien souvent insoupçonnées — de l'analyse statistique. Certes, la détermination de certaines données par observation et mesure directe n'est pas exclue, mais elle reste cependant insuffisante car elle ne peut que très imparfaitement prendre en compte l'aléatoire. La réalité d'une donnée dans une entreprise qui existe et qui vit, n'est pas forcément, en effet, la valeur dépouillée que l'on mesure en observant d'un clin d'œil critique le déroulement réel de l'opération présente. De multiples autres opérations de même espèce se sont déjà déroulées dans le passé et leur modèle statistique tient compte de tous les aléas que l'on pourrait incorporer à coup sûr à la seule valeur mesurée. Ce modèle statistique représente donc bien mieux la véritable donnée vivante caractéristique de l'entreprise puisqu'il contient en quelque sorte la « mesure de l'aléatoire » qui imprègne l'ensemble des effets qui s'y produisent. Il donne la description exacte et précise de la donnée moyenne et évalue ses fluctuations en termes de probabilités.

Et ainsi se trouve renforcée la réflexion qui s'appuie maintenant sur des informations chiffrées, sur des extrapolations raisonnées et qui peut donc faire aisément le tour des nombreuses combinaisons possibles pour ne retenir que les seules valables, qui peut aussi décider d'approximations dont l'incidence a pu être mesurée.

Ici encore, la recherche opérationnelle lui apportera le soutien du « modèle », c'est-à-dire de la représentation, sous une forme mathématique, d'abord des différentes relations existant entre les données, contraintes ou variables d'action et ensuite du critère dont la variation numérique caractérisera la valeur des différentes décisions possibles.

La création du modèle nécessite la participation du responsable. Lui seul, en effet, peut *innover* dans des situations nouvelles ou imprévues que l'étude ferait apparaître et, pour cela, la qualité de sa connaissance intuitive lui sera essentielle et irremplaçable. La recherche opérationnelle, en lui fournissant une trame logique, stimulera alors sa faculté d'invention, en même temps qu'elle

opposera, à des simplifications excessives, la démonstration que certaines vues mèneraient à la contradiction ou à l'absurde.

Action III : la décision

Le modèle ainsi créé sert de base à la décision. Il s'agit là de la fonction capitale du responsable, celle qui lui appartient en propre, celle où il se trouve réduit à ses seules possibilités. La décision réfléchie implique un sens des forces en présence, de leur dynamisme respectif, de leurs interférences, de leur devenir. Loin d'exclure le risque, elle l'accepte et le situe car l'incertain, qui apparaît dans les modèles sous forme de « probabilités » plus ou moins précises, ne se supprime pas.

Mais le modèle aide à la décision car il permet, à proprement parler, *l'expérimentation* qui se déroule sous la forme d'une application numérique : on détermine par le calcul, la valeur du critère, c'est-à-dire le résultat probable, correspondant à telle ou telle décision. On peut donc bien expérimenter ainsi toute décision avant de la prendre. Pour que ce résultat soit possible, il est nécessaire que le système mathématique qui compose le modèle se prête au calcul numérique. Si cette condition n'est pas remplie, on ne peut plus parler de modèle ni de recherche opérationnelle. Celle-ci n'existe que si la décision peut, grâce à elle, disposer d'une vue sur l'avenir, plus aiguë et plus lointaine que celle à qui manquerait ce soutien.

Action IV : le contrôle (régulation)

La décision étant prise, l'action déclenchée se déroule selon une trajectoire et dans le temps. Il faut alors s'assurer, de façon continue, que ce déroulement s'effectue bien conformément aux prévisions faites au cours de l'effort de réflexion qui a précédé la décision et, si nécessaire, agir en fonction des résultats observés pour que ceux-ci continuent à répondre aux intentions.

Il s'agit là d'un véritable rôle de régulation consistant à prendre, lorsque cela est justifié, des décisions correctives destinées à annuler des écarts et venant donc modifier plus ou moins la décision initiale. Ce rôle de régulateur peut être délégué par le responsable et il le sera en général grâce à l'existence dans l'entreprise d'une structure de contrôle. La recherche opérationnelle permet, on va le voir, d'aider à la conception d'une telle structure.

IV

On ne peut parler des problèmes de l'entreprise en passant sous silence les problèmes de structure. Or, la recherche opérationnelle, sous sa forme maintenant classique, s'est préoccupée surtout des problèmes posés par le fonctionnement des structures préexistantes. Mais il est aisé de voir qu'elle concerne aussi les autres problèmes.

La méthode des modèles, décrite plus haut, et qu'elle utilise systématiquement, est en effet une méthode expérimentale tout à fait générale, aussi vieille que la science et qui représente un aspect fondamental du fonctionnement même de l'esprit humain. C'est la méthode analogique dont la cybernétique a largement usé et qui consiste à représenter un système ne se prêtant pas à l'expérimentation directe par un « modèle », c'est-à-dire un autre système obéissant aux mêmes lois mais d'une autre nature plus maniable. L'expérimentation se fait alors en utilisant le modèle.

Cette méthode analogique est aussi celle qu'emploie le constructeur de modèles réduits, celle dont se recommande l'urbaniste qui construit la maquette d'une ville dans le but de juger de l'esthétique de nouveaux ensembles projetés ; c'est celle de l'homme de laboratoire qui expérimente un barrage pas encore construit, un profil d'aile d'avion n'existant encore que sur le papier ou un nouveau système de suspension de voiture tout juste sorti du cerveau de son inventeur, et qui fait cette expérimentation en mesurant des intensités de courant et des forces électro-motrices. C'est encore la méthode qu'emploie le physicien lorsqu'il représente un phénomène physique par son modèle mathématique et c'est également celle qu'a systématisée la cybernétique en généralisant la notion de feed-back, montrant ainsi l'identité des lois qui régissent la régulation des machines, l'homéostasie de l'être vivant, l'équilibre des systèmes économiques ou des mécanismes psycho-sociaux tels que l'entreprise.

Parmi les modèles de toute nature que l'on peut utiliser, la recherche opérationnelle emploie normalement le modèle mathématique grâce auquel le raisonnement peut atteindre la plus grande précision. Mais il ne lui est pas interdit d'utiliser aussi d'autres catégories de modèles, dans les cas, par exemple, où la nature des problèmes ne se prête pas de façon provisoire ou définitive à la formulation mathématique. Or, parmi eux figurent précisément ceux que pose la conception des structures. Une structure est une construction dans laquelle des facteurs, cependant déterminants, sont de nature purement subjective et ne peuvent donc se mettre en formule, mais dans laquelle aussi le jeu de ces facteurs se déroule

sur une trame de nature objective qu'il est par conséquent possible de concevoir de façon purement logique. Cette trame est constituée par le « graphe » des fonctions qui doivent s'exercer dans l'entreprise. Le problème de structure est, dans son aspect statique, un problème de coordination de fonctions, c'est-à-dire un problème de cybernétique et, à ce titre, entre pleinement dans les possibilités de la méthode analogique.

L'analogie ne se présente plus ici sous la forme d'une « loi », mais comme une « hypothèse ». On fait l'hypothèse que la trame fonctionnelle d'une structure d'entreprise est conçue comme l'est une machine automatique. Les mêmes fonctions d'action et de régulation se retrouvent effectivement dans l'une et dans l'autre ; il y a, dans l'entreprise, comme dans la machine, des feed-backs à tous les niveaux de la hiérarchie et toute la trame fonctionnelle logique vient se construire autour de ces feed-backs. Une méthode logique d'analyse des structures découle de l'utilisation systématique de cette analogie.

V

Dans le monde moderne, complexe et organisé, le responsable reste un homme avec toutes ses prérogatives mais aussi avec toutes ses faiblesses : de plus en plus profondément impliqué dans un contexte où les contraintes de l'organisation et la complexité des mécanismes s'accroissent chaque jour, cependant que la multitude des données et l'intervention de l'incertain viennent stériliser les modes habituels de pensée, il peut se trouver désorienté et être conduit à la pire des choses : l'indécision. Il ressort de ce qui précède que la recherche opérationnelle et, de façon plus générale, le raisonnement analogique fournissent à ces difficultés une solution théorique : non seulement parce qu'ils habituent les responsables à utiliser systématiquement des modes de pensée logique particulièrement efficaces, mais aussi parce qu'ils leur donnent la possibilité de raisonner « fonctionnellement » sans qu'il soit besoin d'avoir une connaissance détaillée et totale du mécanisme complexe et en fonction d'éléments d'action et de régulation résultant de la simple observation des « entrées » et des « sorties ».

Ce faisant, le responsable apprend à se comporter en cybernéticien et non plus en ingénieur. Celui-ci a été formé dans une autre optique qui est celle des sciences physiques classiques. Ces dernières concernent un domaine où le temps intervient différemment. Car tout y reste stable ou y tend vers la stabilité jusqu'à l'intervention d'un élément

extérieur. Et, généralement, celui-ci peut être isolé, mesuré, appliqué de manière assez facile, au moment choisi pour le commencement de l'action, de même qu'il peut être modulé ou même supprimé quand on désire la fin de cette action.

Par exemple, on peut encore, successivement, décider de construire une maison, tracer les plans, attendre le permis de construire, réunir les matériaux, l'outillage et les ouvriers, mettre en route le chantier, en accélérer ou ralentir l'activité, sans modifier pour autant le projet initial, et planter, sur le faîte, le drapeau qui indique l'accomplissement de l'œuvre. Mais on ne peut plus décider d'une opération importante de décentralisation sans s'être préoccupé de ses répercussions sur la pression inflationniste, sur la répartition des habitants entre villes et campagnes, sur l'activité économique des régions qui subiront des transferts de population, sur l'implantation des établissements scolaires, le développement de la criminalité, etc... Et une fois cette opération mise en œuvre, il faut que les décisions prises ensuite dans d'autres domaines ou bien n'interfèrent pas avec la précédente, ou bien entraînent un remaniement du plan global. Tout est lié et l'ensemble est inextricable si on ne tente de le voir en cybernéticien.

Encore convient-il de bien voir les limites dans lesquelles est valable l'attitude cybernétique et utile l'outil que constitue la recherche opérationnelle. Toutes deux ne concernent que ce qui est mécanisme, ce qui, dans le problème, est automatique. Le responsable peut, grâce à elles, parvenir à une connaissance *analytique* plus profonde et plus sûre du groupe qu'il dirige — mais sa fonction fondamentale, si elle est ainsi facilitée, n'est en rien modifiée dans sa nature : il lui restera toujours à faire la *synthèse*. Le spécialiste lui apportera l'information sous une forme élaborée et la plus efficace mais de cela seul ne pourra naître la décision, pas plus que l'eau n'apparaîtra spontanément parce qu'on aura mélangé hydrogène et oxygène. Il y faut en plus une étincelle, électrique dans le dernier cas, et dans le premier d'une nature intuitive, autre que la simple « raison raisonnante ». La prise de décision, résulte d'une telle étincelle qui ne peut jaillir que dans l'esprit du responsable et qui y jaillira au moment choisi par lui, avec d'autant plus d'efficacité qu'il aura mieux assimilé l'information que lui présente le mathématicien et mieux supputé le risque qu'il y a à accepter ou à modifier sa projection dans l'avenir.

CYBERNETICA (Namur)
Vol III — N° 4 — 1960

A predictive model for self organizing systems

by Gordon PASK and Heinz Von FOERSTER,

University of Illinois (1)

INTRODUCTION

There are many systems, either constructed or naturally occurring, which exhibit the phenomena of competition and cooperation. A couple of examples are the blocks of neurone, like elements described by R. L. Beurle [1] (2), (where the propagation of a wave of activity depends upon cooperative phenomena), and the situation which occurs in an open reaction system [2], (where subsystems compete for a limited supply of energy). In all such cases, it is tempting to describe the activity of the system in terms of the play of a game, and we shall try to clarify some of the ideas behind this type of game theoretic description. The point is, that if we *can* identify the activity of such systems with a game, we have achieved a satisfactory conceptual image of what goes on, and in some cases will be able to predict and evaluate methods of play.

In adopting this descriptive method we also adopt " the least thing which is able to compete " as a unitary entity in our model. Whereas a physicist will use particles as building blocks and a chemist, molecules, an observer who takes the present viewpoint will use players. Indeed, when he looks at the observable world, we assume that he partitions its constituent elements into subsets such that these subsets compete with each other.

---

(1) This work was sponsored by U. S. Office of Naval Research under Contract Nonr 1834 (21).

(2) The references of this article will be printed at the end of the second part in *Cybernetica*, vol. IV, nº 1, 1961.

The structure and dynamic aspects of a model

The primitive consistencies of the world which lead an observer to believe that it is worthwhile building a predictive model (or, as the process is sometimes called, specifying a system) resolve themselves into two components when the model is built. The first component is the structural aspect of the model (that is, the sort of inquiries which are answered, the sort of predictions the model can be used to make, and the variables which are specified). The second component refers to measurement of the state changes which occurs within the structural framework.

In physics it is possible, often with difficulty, to identify these components with the logical and metrical [3] aspects of an experimental procedure. In the biological sciences, for models in general, the distinction is confused [5]. But if it happens that we have cast our investigation within the reference frame of a game there is a simple enough dichotomy. The structural aspect of the model refers to players and coalitions, and the rules of the game. The dynamic and mensurative aspects refer to the strategies which the players adopt. At least, this is the case for a surprisingly large number of systems.

We may have more or less uncertainty about the dynamic and structural aspects of a model and the system it represents. If we have little uncertainty about either, the game theoretic description is pointless. It would be absurd, for example, to describe the action of a flip-flop circuit as a competitive game in which two players, the valves, vied for a commodity in limited supply (anode current). If we are uncertain about the dynamic aspects of the model, the game analogy is sometimes applicable and it is used with great potency in statistical techniques which involve " games with nature " and " decision making under uncertainty ". However, in order to use the game analogy in this way, the structural basis of the model must be reasonably sound.

The particular case of the self organizing system

For the present we are most concerned with self organizing systems, which have been characterized at length in other papers [4, 5, 6, 7]. We note that such a system is specified with reference to an observer. It is called self organizing because of the observational expedients which must be adopted in order to make its beha-

vior appear consistent. These expedients are dictated by a peculiarity — that if the system is self organizing, an observer will be structurally uncertain about whatever model he builds to represent it.

We shall thus concentrate upon an application of the game theoretic analogy in which we are moderately certain — often nearly sure — about what a system will do, but are ignorant (by logical necessity and not through lack of effort) about the structural aspects of the model. A self organizing system provides an exception to the clear cut dichotomy. We cannot distinguish " structure " because it, too, changes and that which remains " invariant " and thus describable is a function of structure and of change — of the players and of the game they play.

We recall that the observers unitary entitles will be players. If an observer looks at a self organizing system and wishes to talk about the game which is being played, he must continually re-define the competitive entities by continually re-making his partition of the constituent elements in his world. However, we believe that this is possible, at least within limits in a game theoretic reference frame.

Outline of the discussion

The game theoretic description is not ideal. But it has the advantage of familiarity and is a first approach to the calculus we have proposed, in an admittedly unsatisfactory manner, in our previous papers [6, 7].

We shall not attempt to cover the entire field. Applications of the concept of an " imputation " [8] are excluded, for example, and we have taken several liberties by way of tacit assumptions which are plausible, but unproved — as a case in point — actual calculation of voting coalitions implies the existence of a " characteristic function " [8] (a superadditive set function for the " essential " game). Thus we hope that our comments will be taken as fairly informal and introductory. We shall develop our argument with reference to two pieces of experimental work which are in progress at the moment. The first of these, which is examined in Part I of the paper is called a " social interaction experiment ", in which the players are human subjects who interact with one another. Their interaction is, however, restricted by certain constraints (which change as a function of the interaction) and in particular by a limited supply of a commodity (called " money "), which players must use in

order to " purchase " the channels of communication via which they interact. Here, it seems, there is little objection to the game analogy, but one might reasonably doubt some of our assumptions about the players, for example, that they learn a preference ordering over a set of possible outcomes of play.

The second set of experiments, which are examined in Part II of the paper, concern artefacts. In the simplest case we replace players by automata. Here we feel our rationality assumptions are irrefutable, but that our choice of the game analogy might be rejected. All the same, we hope to uphold our choice (especially in the case of electrochemical self organizing systems with no differentiated components) and to advance it as a method of describing the activity within learning (and evolutionary) systems.

PART I

THE SOCIAL INTERACTION SYSTEM

The experiments are called " social interaction experiments " because a set of human subjects who act as players in a partly competitive and partly cooperative non-zero sum game, may be regarded as " trading with " one another.

Although the trading process within this game playing system is, in many ways, related to the kinds of trading which are commonly talked about, it is not identical with any of these, and a number of distinctions will be pointed out in a moment. Presently, however, a brief description of the physical set up will be given, in the hope that this will facilitate the elucidation of the further discussion.

The experiment provides for a small number n of participants to interact with each other via an electronic system. Each participant is provided with a display and control panel as sketched in Diagram 1. On a meter M he can read his instantaneous " wealth ". A set of n lamps L will indicate to him who, amongst the $n - 1$ other participants, is just making an " offer " to him (shaded circle). If he wants to accept this offer, he must turn his " acceptance switch " A to this position. However, he may not do so, if he does not want to accept this offer. Finally, he has on his panel also an " offer directing switch " O, which enables him to direct his offer to one of

his participants (including himself). In order to effectuate this offer he has to press the " offer making button " OB. This, however, does not necessarily guarantee that his partner will be informed of his offer making activity. This will depend on several other parameters.

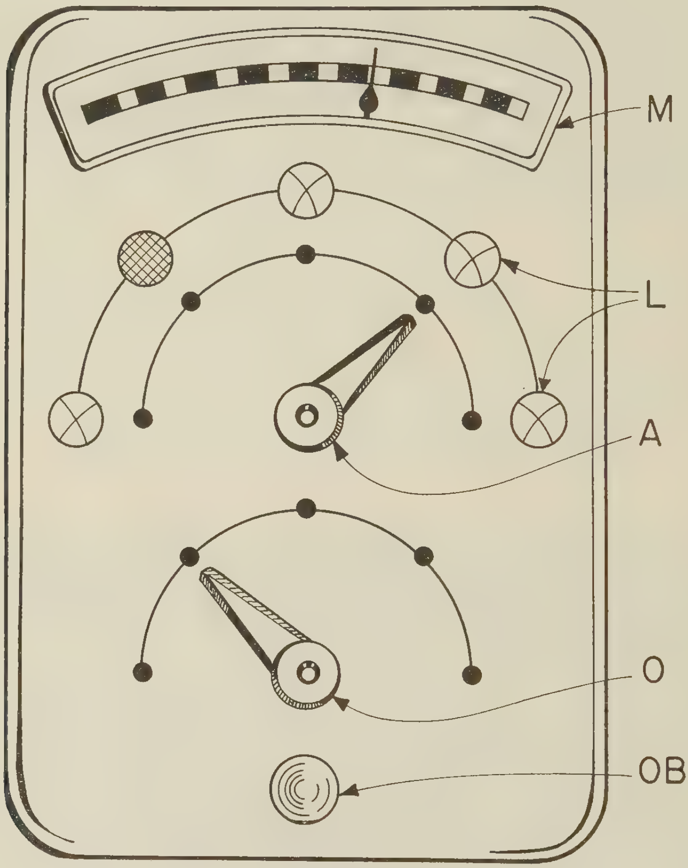


DIAGRAM 1

M = Meter. L = Lamps. A = Acceptance switch.
O = Offer-directing switch. OB = Offer-making button.

A cable-trunk leads from each panel to the electronic system mentioned before which records and transforms the activity of each player, as will be described later in detail, and sends this so digested information to all other participants in form of changes in

their meter-readings, which are consequences of the activity, past and present, of all participants.

It may be pointed out already, that one of the essential features of the way in which the participants are interconnected over the electronic system is that this connection system is of two different kinds. One kind will be called the " monetary connection system " and will be stationary and symmetric during one experimental run, although its structure can be changed from run to run. The other kind will be called the " signal connection system " and will constantly change as a consequence of the activity of the players. This system will only in rare cases display perfect symmetry ; i.e., that player A can reach player B with the same effort with which player B can reach player A.

In the following ten points the functioning of the social interaction game will be sketched, using a mercenary vernacular for exemplary purposes only, although any other terminology could have been employed equally well.

(i) Money, within the system, corresponds to raw material (or unutilized energy) in the real world. The kind of raw material does not matter. Thus it might be coal, mineral deposits, or any stockholding of parts which are supplied to (and may be accumulated by) individuals or corporations. In general these individuals or corporations will organize the raw material into potentially saleable merchandise, such as motor cars, or aeroplanes, and in general also if they do not organize their material their stock of it will depreciate. Depreciation into money sinks and local appreciation from money sources will appear in most of the experiments to be described.

(ii) The players in the system correspond to these individuals. Insofar as they organize their stocks of money, they are able to make offers to one another. Like the real life traders they are subject to a rule that unused stocks depreciate.

Within the system there is nothing which corresponds directly with merchandise, motor cars or aeroplanes. However, if one accepts the suggestion that that, what is gotten for money is " merchandise ", then, in a sense merchandise in this experiment is the establishment, maintenance and improvement of communication channels between the players. For the present purpose we do not need to consider these entities explicitly, for we are concerned with how the players can interact — that is to say, with what offers they can make and accept if they *do* organize the raw material, *not* with the entities they happen to fabricate.

On the other hand, just as a trader in the real world has to pay for the privilege of making an offer (an amount corresponding to the cost of fabrication and the cost of offer making itself), so, in the system it costs a player a definite amount of money to make an offer.

(iii) In the system (and also in the real world), offers which are made by one player need not necessarily be accepted by another player. Thus, money can be wasted by making offers in a barren market.

(iv) Both in the system and the real world a pre-requisite of offer making is that the player who makes the offer shall be able to communicate with the player to whom the offer is made. In order to build up such a contact, or " channel " of " communication ", the offer making player must spend money, analogous to the expenditure incurred by a real life trader when he has a telephone line installed.

Further, the " channel " or the telephone " line " must be kept in repair once it has been installed, and without the expenditure of money it degenerates. However, the cost of maintenance is less than the cost of installation, and over-all there is a tendency for a communication structure, once it has been paid for and built up, to persist.

(v) A player builds up a channel of communication by directing offers towards another player. Such directed offers will not be received until sufficient offer making money has been used up to purchase a channel. Thus, if it is persistently idle, it degenerates.

(vi) When a player makes an offer, it may or may not be received by the player to whom it is made, according to whether or not a channel of communication has been built up between them. Supposing that the offer is received by the second player, he may or may not accept it. If he accepts it, the first player gains money, an amount called a " profit " of the trading.

In the system we shall examine, only one kind of trading action (and one kind of offer) is permitted (although a player may make this kind of offer to several other players). Thus, in this system, the " profit " is the same for any offer which is made by one player and accepted by another.

Suppose, on the other hand, that the second player had not accepted the offer made to him, the first player would have lost an amount of money, equal to the cost of making an offer.

Accumulated money — the amount stored up by each player separately — is called the wealth of the player. Clearly " wealth "

can be accumulated by making profits (as a function of successful trading activity) and it can be lost as a result of buying channels of communication and making unsuccessful offers. Further (as mentioned very briefly a moment ago), there is a tendency for wealth to depreciate if it is not used — in other words, there can, according to the experiment considered, be money " sinks " and there can, again according to the experiment considered, be money sources other than profit, through which money comes into the system.

(vii) In the real world wealth corresponds to a stock of raw material, or its equivalent. It will be convenient to think about the equivalent monetary form, since the individual's wealth is then his bank balance.

Regardless of what trading an individual may indulge in, it is possible for his wealth to change, and to interact with the wealth of other people. The constraints which determine how the wealth of different persons will interact are usually of a social kind. Thus, all individuals with a bank balance in England are subject to certain rules of taxation which acts upon their accumulated wealth. All individuals who bank in America are subject to a different set of rules. The tendency for wealth to interact, or for the same rules of depreciation to be applied to the wealth of a group of individuals, is expressed in terms of a " monetary distance " between these persons. Thus people who have banking accounts in the same country would be " monetary neighbors ".

In the system, each player is assigned a monetary distance from the others, and from any other " sinks " and " sources " of money which may have been specified. In the experiments we shall consider, the rule of interaction is very simple. Money tends towards an equilibrium. This is achieved if the wealth of any player in a group is equal to the wealth of any other player in the group.

(viii) It is convenient to define another " distance " measure called " signal distance " between each pair of players. We have already noticed that a pair of players may or may not be able to communicate and we shall define the signal distance between " A " and " B " as a measure of " A " ability to communicate with " B ". Notably the signal distance does *not* measure a desire to communicate *or* an amount of offer making. It measures the extent to which communication is possible, in view of the structure of the system. It must be emphasized, however, that the structure is continually changing. It depends upon, and comes into existence as a result of the trading activity of the players. Although, in certain of

these experiments, we may restrict the possible communication channels, the general case is one in which any channels and thus any set of signal distances can be built up.

(ix) The signal distance between a pair of players is most unlikely to be the same as the monetary distance. As a parallel, in the real world we rarely trade with people who bank in the same place, though we may on some occasions. In Diagram 2 we show a hypothetical distribution of monetary distances between three players 1, 2, 3 at two instances t_1 and t_2 and recall that these remain invariant during an experiment. The length of the lines connecting two players is taken as the monetary distance.

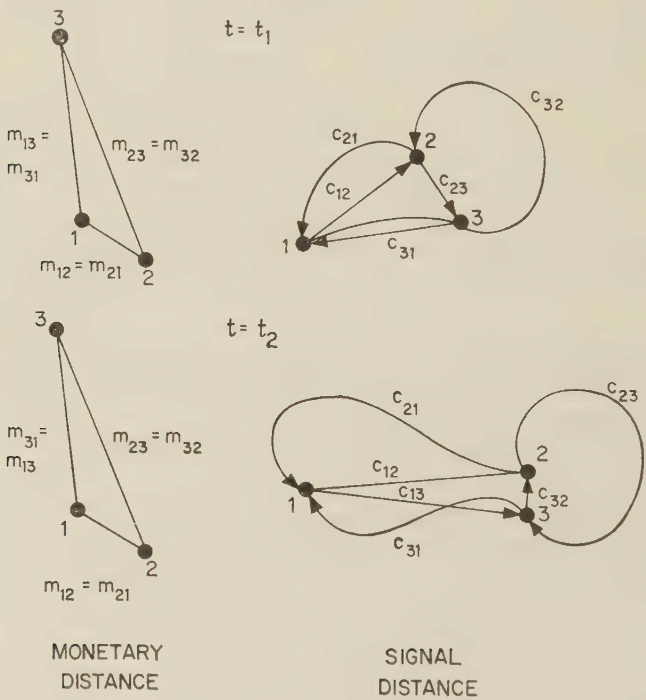


Diagram 2

In the same diagram, we show the signal distances between the same players at two instances t_1 and t_2. Taking the lengths of lines connecting two players as indicating their signal distances, we recall that (1) these distances will change as a consequence of their trading activity, (2) signal distance is not necessarily a symmetric relationship.

(x) We make the assumption that the players in the game of trading wish to maximize their average wealth, in particular that they will prefer an outcome which yields greater wealth to one which yields less, and it is arranged that each player in the game is at least aware of his own wealth at each instant. In reality we may have to motivate the players by converting their average wealth into a currency — such as real money — which is useable in the real world.

We do not make any further assumptions about how these players decide upon trading actions. In particular, we do not assume that a player is entirely avaricious, or that wealth means the same thing to *him* as it does to *us*, or that of other players. We suppose that a player values wealth according to what he can do with it, in order, ultimately, to increase it, and that the value it has for him will depend upon his own plans.

We can provide each player with more or less knowledge about the wealth of the other players. At one extreme, which tallies with the usual notion of a game, each player is informed of the wealth of all the other players — for example — by having a set of wealth indicators, including his own. At the other extreme — which we shall assume for the present discussion — a player receives information only about his own wealth (or precisely, since the nodes are not independent, about the wealth in his monetary neighborhood). In this case the players necessarily indulge in a game in which they are partially ignorant of the gain or loss attending different outcomes (these have been called " misperception games " by Luce and Adams) [8], and a number of intermediate arrangements are clearly possible.

As the game is played we expect (and from pilot experiments are confident that) coalitions of players will be formed. These coalitions (sub-sets of players who cooperate with one another in the competition for wealth) will be evidenced as signal neighborhoods since cooperation implies, at least, communication. In these experimental conditions which make the players behave as a self organizing system, the coalitions will be metastable but will not persist indefinitely.

When examining the game which is played we are concerned with the offer making interaction between a set of players induced by specifying a monetary linkage between these players, i.e., by specifying monetary distances and some rule of change of wealth. In particular, we are concerned to detect signal neighborhoods, evidencing coalitions, and to ascertain how these are built up as a

result of the trading, and how the trading activity depends upon their existence. We shall now examine these concepts in greater detail.

Linkage between the wealth of different players

A generalization of Diagram 2 is a finite directed graph with N nodes, of which a sub-set of n nodes are placed in one to one correspondence with n players, the remaining $N - n$ nodes being in one to one correspondence with either monetary sources or monetary sinks. Thus, if $n = 4$, as in Diagram 3, the directed graph in which branches represent monetary linkage may take the form as shown in this figure.

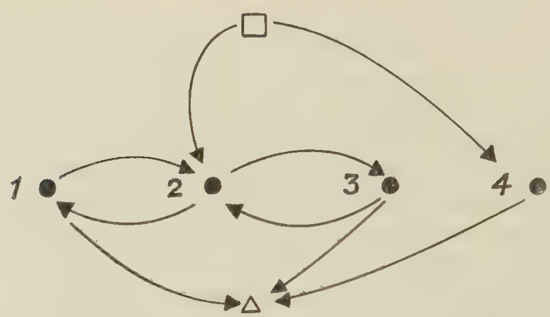


Diagram 3. — Directed graph, representing monetary linkages. Square and triangle standing for source and sink, respectively.

In this picture we assume that the wealth of a player either is, or is not, linked to the wealth of another player, source, or sink. However, by associating a number with each branch, we could introduce the idea of a multi-valued linkage or monetary distance. Essentially, this is the picture which we shall now develop and present in a more convenient form.

Let $i, j = 1, 2, \ldots\ldots n$ be the index of any two of the n players, and $N \geqslant i, j \geqslant n + 1$ be the index of any source or sink. Let u_i be the wealth of the i-th player, and u_j the wealth of the j-th player, and let $\Delta u_{ij} = u_i - u_j$. As a consequence of the activity of the players Δu_{ij} will, of course, be a function of time.

If we make the entirely artificial assumption that all of the players in the system are inactive, so that their trading does not affect their wealth, we can express the wealth changes which take

place as the system approaches monetary equilibrium by N equations. For the i-th player

$$\frac{\delta u_i}{\tau} = -\sum_{j=1}^{j=N} \frac{\Delta u_{ij}(t)}{m_{ij}} \tag{1}$$

The linkage coefficients, m_{ij} in this equation, are in general functions of time and of u_{ij}. However, for the present purpose, we make the simplifying assumption that the values for m_{ij} are constants, specified by the experimenter, and furthermore

$$m_{ij} = m_{ji} \tag{2}$$

Thus, the set of " monetary distances " form a monetary distance matrix $M = \|m_{ij}\|$, with N.N entries. From (2) this matrix is diagonally symmetrical. Further, the $n.n$ sub-matrix of M which consists of the first n entries in the first n rows of M, specifies the linkages which exist between the wealth of the players, as distinct from the monetary sources and monetary sinks.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
7	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

S_1

$n = 8$
$N = 10$

DIAGRAM 4 (i)

In order to discuss the implications of M, assuming a particular form, let us introduce variables signifying a " monetary neighborhood " s_{ij}, such that

$$s_{ij} = 1, \text{ if and only if } m_{ij} < m_o$$
$$s_{ij} = 0, \text{ if and only if } m_{ij} \geqslant m_o$$

where m_o is an arbitrary constant. If it is the case that the values of the m_{ij} can be partitioned into disjoint sub-sets, one including values much less than m_o, the derived matrices $S = \|s_{ij}\|$ will reflect

the structure of the matrices M, from which they are derived. Thus, if all the entries in M are approximately m_0 and nearly equal, a case which would characterize a system where the wealth at any node affected the wealth at all other nodes, the matrix S is of little value. On the other hand, a matrix S_1, which describes a state of affairs in which there is at most, little effect exerted by sources and sinks, or between two sub-sets of players, but in which players belonging to these sub-sets are monetary neighbors, proves informative (Diagram 4 (i)).

Again, S_2 describes a state of affairs in which the wealth of each player is little affected by the wealth of other players, but each player is signal neighbor to his own source or sink (Diagram 4 (ii)). S_3 describes a similar system, excepting that there is one source or sink in place of n, whilst S_4 specifies conditions in which the subsets of monetary neighboring players are one to one related to two different sources or sinks (Diagrams 4 (iii) and 4 (iv) respectively).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
9																
10																
11																
12																
13				O								O				
14																
15																
16																

S_2

n = 8
N = 16

DIAGRAM 4 (ii)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

S_3

$n = 8$
$N = 10$

Diagram 4 (iii)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
6	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
7	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
8	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
9	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

S_4

$n = 8$
$N = 10$

Diagram 4 (iv)

The actions of a player

We shall now provide a nomenclature for describing the actions which a player is able to make and the signals, indicating offers, which he is able to receive. For this purpose we need a set of binary variables ξ, which refer to the action of making an offer, η which refer to the action of accepting an offer, and x which describe the signals which a player receives to indicate offers being made ([1]). We shall identify the action of making and/or receiving an offer with the process of making a move.

Since the variables are binary, they can assume only the values 1

([1]) Greek symbols denote variables controlled by the players. Latin symbols indicate responses by the system.

and 0. We shall thus describe only the conditions in which they assume the value 1. Further, these variables are all functions of time, but time will not be introduced into the nomenclature. Finally, whenever a player makes a move, this move occupies a finite interval called τ, which is a constant and has the same value for each player.

(i) $\xi_{ij} = 1$, if and only if (1) the i-th player directs an offer specifically to the j-th player, and (2) the wealth $u_i \geqslant u_{\min}$.

(ii) $\xi_i = \sum_j \xi_{ij}$.

(iii) $\eta_{ij} = 1$, if and only if the i-th player accepts an offer which he has received from the j-th player.

(iv) $x_{ij} = 1$, if and only if an offer is received, but not necessarily accepted, by the j-th player from the i-th player.

(v) $\Sigma_{ij} =$ the time distribution of offers made by the i-th player to the j-th player.

(vi) $X_{ij}^{(i)} =$ the time distribution of the vector $x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in}$.
In addition, the i-th player receives at each instant a measure of the variable u_i which represents his wealth so that a sequence, U_i, of numbers represent the time distribution of u_i. We have

(vii) $U_i = [u_i(t_0)\ ;\ u_i(t_0 + \tau)\ ;\ u_i(t_0 + 2\tau) \ldots]$

Building a communication structure

As has been pointed out in the introduction, one of the essential features of this game consists in the separation of energetic or monetary distance between the players and their signal distance. Furthermore, as it may be recalled, since signal distance is the merchandise, it is the signal distance between two players which will be subject to changes as a consequence of the activity or indifference of the individual players. We shall suggest now an expression for the temporal change of this important parameter as a function of the activity of the players and time.

Let c_{ij} denote the signal distance between the two players (i, j). Since this distance will decrease for a successful move, i.e., when an offer was accepted, on the other hand c_{ij} will increase during inactivity, $c_{ij}(t)$ is clearly a function of time and activity and its change δc_{ij} during an interval $\Delta t = \tau$ may be expressed by

$$\frac{\delta c_{ij}}{\tau} = \frac{c_{ij}}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\xi_{ij}(c_e + a_{ij}c_p) \tag{3}$$

The first term of the right hand side of equation (3) clearly indicates a degeneration of the communication channel, since it indicates an increase of signal distance with time. In the limit ($\lim \tau = \lim \Delta t$ approaching zero) the signal distance would grow exponentially with τ_0 as time-constant. This time constant may be chosen by the experimenter.

The second term describes the decrease in signal distance and hence an improvement in communication, due to the activity of the players. This term consists of two parts

$$\text{(i) } \frac{1}{\tau}\xi_{ij}c_e \quad \text{and} \quad \text{(ii) } \frac{1}{\tau}\xi_{ij}a_{ij}c_p$$

Part (i) is easily understood if one remembers that, according to our rules layed out earlier [1] a player builds up a channel of communication by directing offers to another player. But $\xi_{ij} = 1$, if and only if i makes an offer to j, otherwise $\xi_{ij} = 0$. Hence, this part represents the decrease in signal distance between a pair of interacting players with c_e/τ the rate of change of signal distance during the move-making interval τ.

Part (ii) of the second term in equation (3) describes a built-in tendency for signal distances below a certain value to maintain this value. This is achieved by introducing the binary variables a_{ij}, signifying a " signalneighborhood " and defined in the following way

$$\begin{aligned} a_{ij}(t) &= 1, \text{ if and only if } c_{ij}(t) < c^* \\ a_{ij}(t) &= 0, \text{ if and only if } c_{ij}(t) \geqslant c^* \end{aligned} \tag{4}$$

Further, if $a_{ij}(t) = 1$, we shall say that there is a " channel " of communication between the i-th player and the j-th player. We now give the word " channel " a definite meaning by interpreting c^* as a threshold. Recalling that $x_{ij} = 1$, if and only if the j-th player receives an offer from the i-th player, we write

$$x_{ij} = 1, \text{ if and only if } \xi_j = 1 \text{ and } c_{ij} < c^* \tag{5a}$$

or equivalently

$$x_{ij} = \xi_j a_{ij} \tag{5b}$$

[1] See point (v) p. 264.

from which we immediately interpret c^* as a threshold value, above which the i-th player will fail to receive an offer signalled to him by the j-th player, and below which all such offers indicating signals are received. Further, it is clear that an $n.n$ matrix $A(t)$ with entries $a_{ij}(t)$ is a communication matrix for the set of n players which may be derived from the $n.n$ signal distance matrix $C(t)$ with entries $c_{ij}(t)$, by writing a number 1 in the i, j-th, entry of $A(t)$ if $c_{ij}(t) < c^*$, and the number 0, if $c_{ij}(t) \geqslant c^*$.

Active systems

Relation (1) described the change in the i-th players wealth which will occur if all of the players are inactive. We shall now examine the changes in wealth which take place as a result of offer making activity.

Making an offer costs the i-th player a certain amount of money and the actual process of making an offer occupies a finite interval τ. Let w be the rate of expenditure, which is the same for each player, when an offer is made. In other words, let

$$w = \frac{u_e}{\tau}$$

whereby u_e is the standard cost for making an offer. Clearly, the wealth u_i of the i-th player is depreciated as a result of offer making at a rate

$$\frac{\delta u_i}{\tau} = -\frac{u_e}{\tau} = -w\xi_i \tag{6}$$

because $\xi_i = 1$, if and only if an offer is made.

Having considered the expenses incurred by making an offer, we now have to consider the increase in wealth if such an offer is accepted. This is, of course, in line with our thesis that establishment of communication should be rewarded. Thus, we shall now introduce an appreciation of wealth w_{ij}, which will occur at the *i-th* player if, and only if, the j-th player accepts this offer

$$\frac{\delta u_i}{\tau} = \sum_j w_{ij}\xi_{ij}\eta_{ji} \tag{7a}$$

Since making an offer to oneself and accepting it should be differently rewarded than in cases where the offer has been accepted by somebody else we shall distinguish

$$w_{ij} \begin{cases} = w_1, \ldots\ldots i \neq j \\ = w_2, \ldots\ldots i = j \end{cases} \tag{7b}$$

We are now in the position to express the total change of wealth of the i-th player as a result of his and all the other players activities. Combining equations (1), (6), and (7), we obtain the total change in u_i

$$\frac{\delta u_i}{\tau} = -\Sigma \frac{\Delta u_{ij}}{m_{ij}} - w\xi_i + \Sigma w_{ij}\xi_{ij}\eta_{ji} \tag{8}$$

Summarizing briefly the three terms of the right hand side of equation (8), we have the first term representing losses due to inactivity of the players (equation (1)), the second term describing losses due to making an offer (equation (6)), and finally the third term, giving the increase in wealth due to a successful offer. At this stage of the development it is futile to try to evaluate equation (8), because nothing is known about the binary variables ξ and η, since these are the ones which are decided upon by the individual players. Hence, in order to evaluate this expression we must know what decision rules are adopted by the several players. For the i-th player it is convenient to express the decision rule in the following form

$$\xi_{ij} = \xi_{ij}(\mathrm{U}_i, \mathrm{X}_{ij}^{(i)}, \Theta_i) \tag{9}$$

$$\eta_{ij} = \eta_{ij}(\mathrm{U}_i, \mathrm{X}_{ij}^{(i)}, \Theta_i) \tag{10}$$

Thus, time is split up into discrete intervals of τ, and in each interval the i-th player is able to select any one of the possible pairs ξ_{ij}, η_{ij}, each of which is called a move. According to (9) and (10) he makes his selection as a function of the measurable time distributions U_i and $\mathrm{X}_{ij}^{(i)}$ and of an unspecified variable Θ_i.

Experimental objectives

The variable Θ_i is introduced to account for the non-closed character of the player. We have no right to assume that the player's attention is occupied by matters which in any way relate to the system. We know, of course, that the player makes decisions about something, but his behavior may be determined by issues which are represented by Θ_i, and will remain unknown to the experimenter. One object of the experiment is to ascertain and to describe those

conditions of the system in which we can regard the Θ_i as negligible and thus write " decision rules "

$$\Phi_i = (\Phi_{1i}, \Phi_{2i}),$$

where

$$\xi_{ij} = \Phi_{1i}(U_i, X_{ij}^{(i)}) \tag{11}$$

$$\eta_{ij} = \Phi_{2i}(U_i, X_{ij}^{(i)}) \tag{12}$$

in place of (9) and (10). The purpose of this separation of Φ into two functions Φ_1 and Φ_2 is to discriminate between a decision resulting in an offer Φ_1, and a decision resulting in the acceptance of an offer Φ_2. According to our hypothesis this will be possible only when the system is in " dynamic equilibrium ", i.e., in a stationary state.

The second, and by no means unrelated, objective is to arrive at a cogent description of the structural changes which occur in the course of trading. It will be convenient to survey the types of change, before we examine the issue of " decision rules " in any detail, and for this purpose we shall now relate the trading activity in the system to the play of a partly competitive game.

The game

First of all we must identify quantities in the system with the payoff function of the game. If we assume that a player prefers a greater gain to a lesser gain in wealth we can regard a distribution of gain or loss (about the several outcomes of play) as a payoff function, for, in this case the distribution will reflect the players patterns of preference for these outcomes.

We shall derive such a distribution recognizing that our assumption may be false in the case of some experimental subject although it will certainly be true at a later stage in the paper when we replace these subjects by competitive automata.

To make the derivation we further assume that either

(i) there are no sources or sinks of money so that (apart from the profit) no inflow occurs and (apart from the cost of move making and building channels of communication), no outflow occurs or

(ii) inflow and outflow of money (through specified sources and sinks) is constant throughout the interval of play.

Given assumptions (i) and (ii) the required distribution or payoff function will, if it exists, be determined by M.

The moves and outcomes

We call the selection of a pair ξ_{ij}, η_{ij}, typically by the i-th player at $t = t_0$ a move for the i-th player at this instant and such moves will be indexed α, β, γ. An outcome of play (a " one move " outcome) at $t = t_0$ is determined by each player selecting one of his possible moves at this instant. Thus, if the first player selects his α-th move, the i-th player his β-th move, and the n-th player his γ-th move, the outcome is signified $(\alpha \ldots . \beta \ldots . \gamma)$.

From the previous discussion, the i-th player is able to select any one of $n(n + 1)$ moves [1] at any instant when $u_i \geqslant u_{\min}$. On the other hand if $u_i < u_{\min}$ only n moves are available since, by definition, the variable $\xi_{ij} = 0$ for all j. Thus if v_{i0} is the number of moves available to the i-th player at $t = t_0$,

$$v_{i0} = n(n + 1) \text{ if } u_i \geqslant u_{\min}$$

$$v_{i0} = n \text{ if } u_{\min} < u_i$$

and the number of one move outcomes at $t = t_0$ is

$$v_0 = \prod_{i=1}^{i=n} v_{i0} \tag{13}$$

Suppose, however, that the players starting at $t = t_0$ adopt sequences of p moves, making in average one move per time interval τ. Such sequences are usually called move strategies, it being assumed that the players decide to adopt this sequence before $t = t_0$. Indexing the length of such a strategy as d there will be

$$\mathrm{V} = \prod_{d=1}^{d=p} \mathrm{V}_d \tag{14}$$

" p move outcomes " resulting from these strategies of length p, where V_d is the number of outcomes which are possible, at the d-th instant $t_0 + d\tau$.

Payoff functions

Since the outcome of play depends upon the action of n different

[1] n receiving positions on the acceptance switch can be combined with $n + 1$ offering positions, which includes the possibility of making no offer at all. However, this is also a move.

players it is convenient to think of an n dimensional array of cells, each coordinate corresponding to the actions of a player, and each cell in the array to an outcome $(\alpha..\beta..\gamma)$. The payoff function will be an array G in which there is written in each cell an n component vector $\vec{g}(\alpha...\beta...\gamma)$ which assigns a gain or loss in wealth to each of the n players. Supposing the first player selects his α-th move, the i-th player his β-th move and the n-th player his γ-th move at time $t = t_0$ the entry

$$g_i(t_0)\alpha...\beta...\gamma$$

in

$$\vec{g}(t_0)\alpha...\beta...\gamma$$

in the array $G(t_o) \equiv G_o$ is the gain or loss of the i-th player in these conditions.

Calculation of gain or loss

The gain or loss in wealth for the i-th player is δu_i as specified by (8) and the distribution of gain or loss for the set of n players is a vector $\delta\vec{u}_0$ obtained by solving n equations of the kind (8) one for each player, given the initial conditions, of $\vec{u}(t_0) \equiv \vec{u}_0$ for $t = t_0$. From (14) there are at $t = t_0$ exactly V_0 possible outcomes, the payoff for which is calculated by substituting in the n equations (8) those values of ξ_{ij} and η_{ij} which correspond to the possible combinations of moves. We thus identify $\vec{g}(t_0)\alpha...\beta...\gamma$, with the vector $\delta\vec{u}_0$ obtained by making the substitutions for the $(\alpha...\beta...\gamma)$ outcomes and G_0 with the ordered set of these vectors.

Clearly G is a function of $\vec{u}$. If we assume a finite number of measurable increments of wealth there will be a finite set of G determined by our choice of the matrix M as seen by inspection of (8).

Variability of G

Since $\vec{u}$ changes whenever the players make moves, it is clear that G will, in general, change continually. The difficulty is exhibited if we write the " strategy length p " payoff function say $G_0^{(p)}$

for the p move strategies with origin at $t = t_0$. From (14) this payoff function has V entries and it may be constructed by iteration of the procedure already described (substitution of the move pairs in (8)). The trouble is that $G_0^{(p-1)}$ is, in general, different from $G_0^{(p)}$ and $G_0^{(p+1)}$ may be something different again. We cannot take such a changeful payoff function too seriously.

The distressing feature is not that G changes (for we could incorporate these transitions into a model of the game in " extensive " [8] form) but that the changes seem unlikely to repeat themselves in an interval, say of p, short enough for the players — or, as later, the automata — to learn by experience what to expect. (True, the changes must eventually repeat, but after an indefinite number of steps.) We may or may not *prefer* constancy of G on theoretical grounds, but unless we can secure at least repeatability in the changes of G, it is meaningless to relate it to the payoff function of the game in " normal " [8] form.

Cyclic changes

Let us make the assumption that the players adopt some consistent pattern of activity, i.e., that each player adopts some sequence of p moves which he plays repeatedly. Making these moves will necessarily change $\vec{u}$ and thus transform the payoff function. We express this by saying that the strategic activity in the interval $(t_0 + p\tau)$ — (t_0) " induces ", written as " $\Longrightarrow$ ", as set of transformations Λ_0 of G_0. In other words,

$$\text{activity} \Longrightarrow \Lambda_0 \tag{15}$$

Writing $G_1 = G(t_0 + \tau)$ as a shorthand expression

$$G_1 = G_0 \,.\, \lambda_0 \text{ where } \lambda_0 \subset \Lambda_0$$

In order to secure repeatability we require either

(i) that $\lambda_0 = \Lambda_0$ and λ_0 is such that

$$G_p = G_0 = G_{p-1} \,.\, \lambda_0 = G_0 \,.\, \lambda_0^p \tag{16}$$

so that $\lambda_0^p =$ identity when the cycle $G_0 \rightarrow G_1 + \ldots G_p = G_0$ is determined by the cyclic group, order p, of λ_0 or

(ii) that Λ_0 is the ordered set $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_p)$

$$\text{with } \lambda_1 \,.\, \lambda_2 \ldots\ldots\ldots \lambda_p = \text{identity}, \tag{17}$$

when the cycle is determined by the ordered application of those $\lambda_0 \subset \Lambda_0$ as indicated

$$\begin{array}{ccccccc} G_0 \rightarrow & G_1 & \rightarrow & G_2 & \ldots \rightarrow & G_p & = G_0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_p & \end{array}$$

If either (16) or (17) is satisfied, we say that $\Lambda_0 \subset \Lambda^*$. If $\Lambda_0 \subset \Lambda^*$ we replace the cycle of payoff functions by an average or stable payoff function (in further reference, often just " payoff function ") say G_0^*, wherein a typical payoff vector

$$\vec{g}_0^* = \frac{1}{p}[\vec{g}_0 + \vec{g}_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{g}_p] \qquad (18)$$

The average payoff to the *i-th* player, for the specified strategy he adopts being

$$g_{10}^* = \frac{1}{p}[g_{i0} + g_{i1} + \ldots\ldots\ldots\ldots g_{ip}] \qquad (19)$$

Thus, if $\Lambda_0 \subset \Lambda^*$ the function G_0^* exists (in the sense that it can be learned by the players) and indicates the result of changing from the particular strategic behavior (which they have adopted in order that $\Lambda_0 \subset \Lambda^*$). Returning, now, to the assumption that the players adopt some consistent pattern of activity, it is clear that they *must* do so in order to rationally maximize their wealth. Further it is necessary that

$$\text{activity} \Rightarrow \Lambda_0 \subset \Lambda^*$$

Indeed, without invoking rationality (1), the system is so constructed that the players cannot adopt a consistent activity such that Λ_0 is not included in Λ^* for — if they did — their wealth would diminish and they would be unable to make consistent moves. In the case of our experimental subjects it is, or course, possible that they will adopt some bizarre activity — like jabbing fortuitously at the offer buttons — or that they will make no moves whatever. We cannot avoid these possibilities but can observe them if they occur. It is worth noticing, for later reference, that when the players are replaced by automata (which we know rather than believe are

(1) But supposing the parameters w_1 and w_2 adjusted to the levels indicated in a moment.

trying to maximize their wealth) these absurdities need not be considered.

Special transformation

Before leaving the subject of payoff functions we shall introduce a special transformation of G_0^* which can be interpreted as increasing the profit margin in the system (or, as we shall later find convenient, it can be interpreted as a rewarding procedure). The transformation is

$$T(G_0^*) = G_0^* + \mathcal{R}_i \cdot g \qquad (20)$$

where g is an n dimensional array with all entries corresponding to outcomes in which the i-th player accepts an offer from the j-th player or vice-versa equal to 1 for all i, j, and other entries equal to 0 and where $\mathcal{R}$ is a positive scalar number.

Clearly this transformation is effected by increasing the parameter w_1, when $\mathcal{R}$ becomes

$$\mathcal{R} = \Delta w_1 = w_1(\text{final}) - w_1(\text{initial})$$

We shall use this procedure almost immediately. At a later stage a transformation similar to T will be accomplished by a different method.

Competitive and correlated strategies

It is possible to choose M and certain parameters of the system so that individual players (acting according to our assumption that they wish to maximize their over-all wealth) will merely compete. Clearly, if the matrix indicating monetary neighborhoods has the form of S_2 as given on page 270 and if $w_2 > w_1$ no advantage is gained from trading. If $w_2 > w$ the entirely competitive game (which would, in these conditions be optimum) can be physically continued. If $w \geqslant w_2$, it necessarily terminates since no player will be able to make a move.

Assuming that w is adjusted empirically so that the play can continue, we shall be interested in the general case where optimum play is not entirely competitive — in other words — in the case where a player will gain by adopting a *correlated* rather than an independent strategy.

To illustrate the idea of a correlated strategy, consider the game

with two players A and B, each of whom has two alternative moves 1 and 2, and for which the single move payoff function is

		Player A	
		Move 1	Move 2
Player B	Move 1	2,1	—1, —1
	Move 2	—1, —1	1,2

The game is called from Luce and Raiffa "Games and Decisions" [33, p. 115]. If it is repeated indefinitely, the players would be best advised to adopt a sequence of moves such as

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	
Player A	1	2	1	2	....
Player B	2	1	2	1	....

or any other sequence in which

(i) if player A adopts move 1, player B adopts move 2, and vice-versa,

(ii) each player adopts each move on an equal number of occasions.

This form of play leads to an average payoff of 3/2 for each player but it requires an agreement between the players and a measure of interaction. However, the average payoff compares favorably with the maximum expectation for independent and avaricious play which is 1/5 for each player. If $n = 2$ (as in the case we have discussed), the statement "the game is non-zero sum" and the statement "the game is competitive" are equivalent. On the other hand if $n > 2$ this is no longer the case and we must introduce further criteria to distinguish those games (and payoff functions) which are competitive from those which are not. We shall use the criterion of whether the game is "inessential" — and necessarily competitive — or "essential" and not necessarily competitive.

We cannot state the conditions for the game being "essential" concisely, for we have not yet defined coalitions in a rigorous manner. However, using our vague ideas of what a coalition may be in this system, it is clear that:

(i) all the players might join into a cooperative mass, a " maximum coalition " — and if they did so this coalition would enjoy all possible benefits of cooperation,

(ii) the players, regardless of the payoff function, might elect to stay separate, in which case they would enjoy none of these benefits.

For each extreme case we can compute the average payoff and we define the game as *inessential* if and only if

$$\text{Average payoff (maximum coalition)} = \sum_i \text{average payoff to player } i,$$

and as *essential* if and only if

$$\text{Average payoff (maximum coalition)} < \sum_i \text{average payoff to player } i,$$

in which case it is worth forming coalitions.

Misperceptions and coalition structures

The game we have devised presents two peculiarities which have already been mentioned. One of these, to be true, is optional (but assumed in the present discussion) namely, that a player is only informed of the wealth in his monetary neighborhood. He thus plays a game in which he is unsure about the monetary gains of the other players (one of the Luce and Adams misperception games). However, he is able to learn by experience, after repeated moves an increasing amount

(i) about the effect of different outcomes upon his own wealth and

(ii) indirectly, through signalling offers and receiving offers about the preference of the other players for different outcomes.

We notice that a player who wishes to behave rationally must learn these preferences and that in order to learn about them he must build up communication channels. This in itself may be sufficient to make the player interact with the others and trade. Having noticed it, we shall not dwell upon the point, for by modifying the experimental conditions and providing each player with an indication of the wealth of the others we can remove the need for such a learning process — and — by comparing two experiments we can

discover the part it actually plays. The discussion will be continued in Appendix I. Instead, we shall examine the second peculiarity of the game which is that, in order to adopt correlated strategies, a pair of players i and j must be separated by a signal distance, of c_{ij} less than c^* and c_{ji} less than c^* for only in this case are they cognizant of each others moves. Conversely, whenever there is a subset f^* of players who are so related that for all $i \subset f^*$ and all $j \subset f^*$ it is true that $c_{ij} \geqslant c^*$ and $c_{ji} \geqslant c^*$, it is possible that cooperative strategies are adopted by the players included in f^*. However, it is also quite conceivable that a player i, although unable to communicate directly with a player j, may yet receive information about j indirectly, by way of an intermediary k. It would thus be legitimate to regard the subset of players $f_e = (i, j, k)$ as able to adopt a common correlated strategy. Notably a subset f will include at least some subsets f^* as, for example, the subset f_e includes the subset $f^* = (i, k)$ and the subset $f_2^* = (j, k)$. We shall call subsets f " potential coalitions " and will define an " active coalition " — or just a coalition — say F, as a subset f in which all of the included players cooperate to achieve a correlated strategy.

We shall also define " potential coalition structures " b, and " coalition structures " B, as partitions of the set of players into disjoint subsets such that typically

$$b = (f_1, f_2 \ldots\ldots\ldots f_\omega) \text{ and}$$

$$\mathrm{B} = (\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \ldots\ldots\ldots \mathrm{F}_\omega) \text{ where } n \geqslant \Omega$$

If $n = \Omega$, we obtain the trivial coalition structure of individual players

$$\mathrm{B}^* = b^* = (1, 2, \ldots\ldots\ldots n)$$

and since $\mathrm{B}^* = b^*$ it is always possible that at least one coalition structure will always exist.

Enumerating the coalitions

To examine the structural aspects of this system we must enumerate those potential coalitions f, which exist at an instant $t = t_0$. According to the previous discussion, a pair of players are included in the same potential coalition f if and only if they can communicate with each other, either directly in one move, or indirectly through intermediaries in a process which takes place over several moves. However, since there are n players, there can be, at the most, $n - 1$

intermediaries in the communication cycle (of offer making, offer reception, and eventually return of an offer to the original player) so that we need be concerned with, at the most, cycles extending over n moves.

From equation (4), the i-th player can communicate in one move with the j-th player if and only if $a_{ij} = 1$, that is, if and only if $c^* > c_{ij}$. We are thus inclined to regard the matrix $A(t_0)$ existing at $t = t_0$ as the one move communication matrix of the players (in other words, to regard it as equivalent to the communication matrices of sociology). However, in order to make this identification, we require two additional assumptions, both of which seem to be acceptable.

(i) Although a player can be informed of his own move without explicit offer making communication, we assume that he does make offers to himself, if he is acting as a trivial coalition of one player. To rationalize this assumption we suppose that although it is less profitable to trade with oneself than with others — by measure of w_1/w_2 — in fact, it is still less profitable to trade with nobody.

(ii) We assume that the matrix $A(t_0)$ remains invariant throughout at least n moves, in other words, we assume that

$$A(t_0) = A(t_0 + n\ \tau) \tag{21}$$

Without (21) we cannot compute the potential coalitions and in assuming (21) we have limited ourselves to observing the system when it is, over at least n moves, in a stationary state (this is not, of course, so restrictive as the case of true equilibrium. The values of the c_{ij} can, and indeed they must, change a great deal in this interval even though the a_{ij} remains invariant). Indeed, nothing is lost by confining our description to the stationary states, for beyond these limits we shall see that the concept of a coalition of players is inappropriate. In the transient states, which separate the " metastable " states in which the system is " stationary " there are distinguishable sets of players, but in general, these subsets are not disjoint. A player can belong to more than one subset at each instant and the present picture does not represent the over-all behavior.

To compute the potential coalitions at $t = t_0$ we first define the graph $A^{\#}(t_0)$ of $A(t_0)$ as a set of n nodes, some of which are connected by directed edges. A node i, corresponding to the i-th player is connected by an edge directed towards j, to the j-th node corresponding to the j-th player if and only if $a_{ij} = 1$. A subgraph of

$A^{\#}(t_0)$ is a subset of the n nodes together with the directed edges which connect them. The order of a subgraph is the number of nodes which it includes.

Let $\underline{a}$, $\underline{b}$, and $\underline{c}$ be nodes in a subgraph $\mathcal{A}(t_0)$ of $A^{\#}(t_0)$, whereby $\mathcal{A}(t)$ has order $\underline{m}$. If $\underline{a}$ is connected to $\underline{b}$ we write : $\underline{a} \rightarrow \underline{b}$. We shall say $\underline{a}$ is connected to $\underline{c}$ if for $\underline{m} > \underline{n} > 0$

$$\underline{a} \rightarrow \underline{b}_1 \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow \underline{b}_n \rightarrow \underline{c}$$

We call $\mathcal{A}(t_0)$ a cyclic net in $A^{\#}(t_0)$ if and only if each node in $\mathcal{A}(t_0)$ is connected to each node in $A^{\#}(t_0)$. If so, we denote the subgraph $\mathcal{A}^{\#}(t_0)$. Each potential coalition $f \subset b$ is a cyclic net. We identify those potential coalitions in b_0 at $t = t_0$ as those cyclic nets $\mathcal{A}^{\#}(t_0)$ in $A^{\#}(t_0)$ and we enumerate them by counting. Similarly we identify the potential coalition structure b_0 existing at $t = t_0$ with $A^{\#}(t_0)$.

Number of different coalitions

In the following table the number $N_c(n)$ of distinguishable coalitions for up to $n = 10$ players is given. Since an exchange of individual players in a given coalition structure produces a new coalition, cases as, e.g. (AB) (C) and (AC) (B), are counted as distinguishable coalitions amongst three players.

n	$N_c(n)$
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4140
9	21147
10	115975

The relation between potential and actual coalitions

So far, we have enumerated the potential coalitions f which exist at $t = t_0$ and have described a potential coalition structure.

We must next comment upon the relation between these entities (which, since they correspond with real connectivities, are measurable) and the actual coalitions F, and coalition structures B. We shall approach the problem by considering a probability $p(f_i = F_i)$, that is, the probability that an observable f_i is, indeed used to sustain a coalition at $t = t_0$.

We generalize our ideas by defining an average measure of whether or not, for any i, $f_1 = F_i$ as

$$P(f = F) = \frac{1}{\Omega} \sum_i p(f_i = F_i) \tag{22}$$

Since $p(f_i = F_i)$ is a probability measure, $P(f = F)$ is a probability measure and thus $1 \geqslant P(f = F) \geqq 0$. Clearly an observer would like to maximize $P(f = F)$ since, if it assumes a value of 1, he is certain that his observable structures f are coalitions F, and if it assumes lower values he is less certain.

Purchase and maintenance of communication channels

A channel of communication between the i-th player and the j-th player, implying an entry $a_{ij} = 1$ in $A(t_0)$ at $t_0 = t_0$ must be purchased at a monetary cost and maintained at a monetary cost, determined chiefly by the parameters τ_0 and c_e of (3) and w_{ij} of (7). Different assignments of these values make it more or less difficult to maintain superfluous connectivity — over and above that which is required to mediate the coalition structure in which the players are combined. Thus, if there is plenty of spare money, a player can afford to build channels which he leaves idle — if money is scarce, he must confine himself to those channels which give rise to profitable trade.

First of all, assume that *any* G_0^* exists at $t = t_0$. If we apply the transformation T of (21) to G_0^* changing the value of $\mathcal{R}$ will change the surplus of available money — as it were — the opulence of the system. An appropriate measure opulence is

$$U^* = \text{available money} = \frac{1}{n} \sum_i u_i \tag{23}$$

As $\mathcal{R}$ is decreased, U^* will decrease and there will be a point at which a given trade, requiring a certain coalition structure, can just be maintained in the sense that all superfluous connectivities have

decayed. At this point $p(f_i = F_i)$ is nearly equal to 1 for most f_i since nearly all connectivity in the system must be utilized connectivity. Thus $P(f = F)$ approaches 1. Below this point the connectivity which mediates F_i will, itself, decay for some f_i. Thus $P(f = F)$ will decrease.

The curve of U^* against $p(f = F)$ will, in general, show several maxima and minima — and we shall examine this behavior with reference to a specific case. Before doing so, we note that the coalition structure which requires the least connectivity is B^*, in which the F_i are single players. As U^* decreases there is eventually a point at which B^* is the only possible coalition structure — below this point there is so little money available that some of the players will be unable to make any moves. At this point, where U^* assumes a minimum value compatible with the play of the game, we have, as observers, the greatest possible structural certainty, for the play is necessarily competitive.

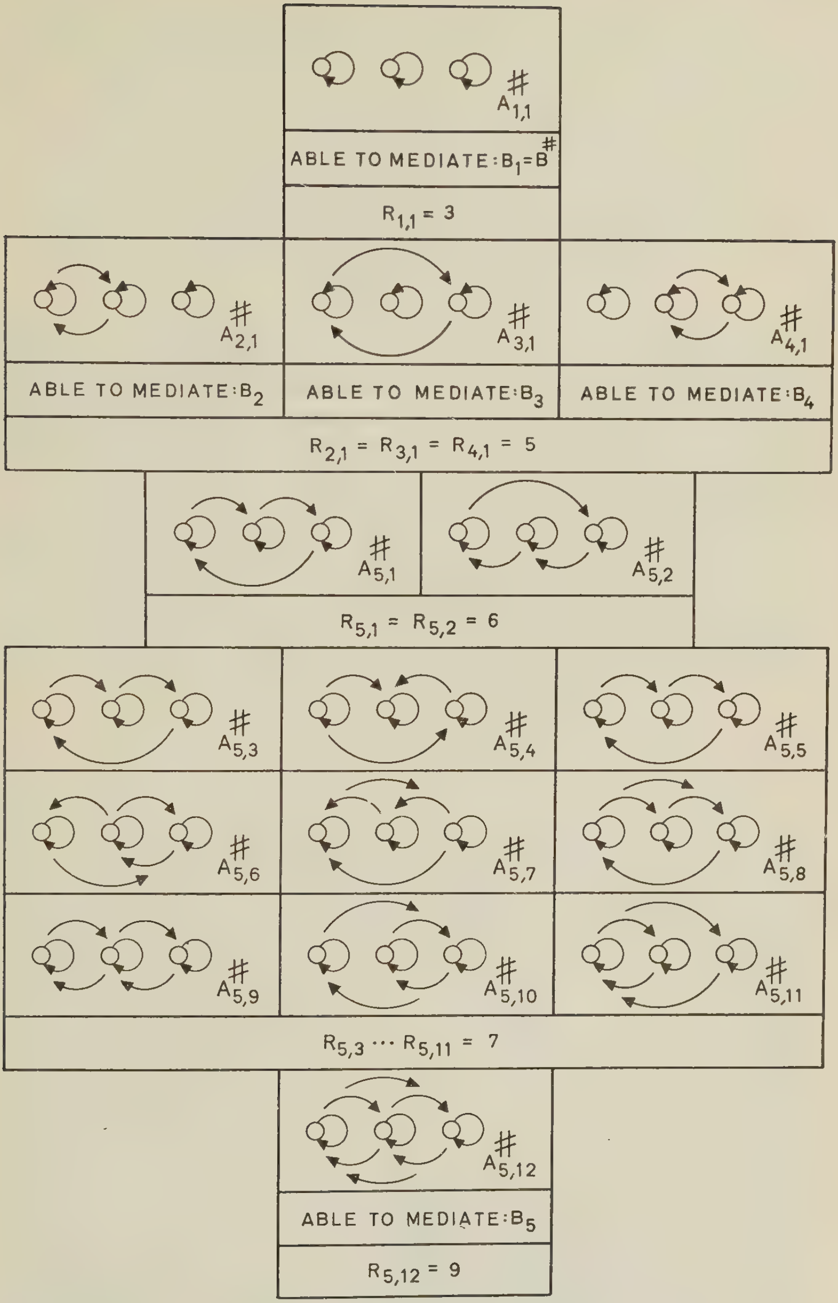
Illustrative case

We shall illustrate these arguments using a system with $n = 3$. For any n there is a finite set of possible coalition structures B_e. In the present case there is a set of five

$$B^* = B_1 = (1)(2)(3)\ ; \quad B_2 = (1, 2)(3)\ ; \quad B_3 = (2, 3)(1)\ ;$$
$$B_4 = (1, 3)(2)\ ; \quad B_5 = (1, 2, 3).$$

For each B_e there exist one or more structural entities represented by graphs $A^\#_e \equiv b_e$ (in other words, in order that the coalition structure B_e shall be realized, there must appear in the system a connectivity such that we obtain $A^\#_e \equiv b_e$ when we apply the procedure previously outlined). In general, there will be several $A^\#_e \equiv b_e$ for each B_e, in which case we use the notation $A^\#_{eh} \equiv b_{eh}$ to indicate a particular one, with $h = 1$, 2 and so on. If $n = 3$ there is for example, only one $A^\#_e \equiv b_e$ for each B_e when $e = 1, 2, 3, 4$, but if $e = 5$, there are 12 of them. These are shown in Diagram 5.

For each $A^\#_{eh} \equiv b_{eh}$ we can compute, through (3) and (4) the minimum maintenance cost of the corresponding structure, and we shall call this maintenance cost R_{eh} (it happens in this system, that the maintenance cost is additive. This is, in general, not true, because most systems have pre-existing structural symmetries).



$A^{\#}_{1,1}$
ABLE TO MEDIATE: $B_1 = B^{\#}$
$R_{1,1} = 3$
$A^{\#}_{2,1}$
$A^{\#}_{3,1}$
$A^{\#}_{4,1}$
ABLE TO MEDIATE: B_2
ABLE TO MEDIATE: B_3
ABLE TO MEDIATE: B_4
$R_{2,1} = R_{3,1} = R_{4,1} = 5$
$A^{\#}_{5,1}$
$A^{\#}_{5,2}$
$R_{5,1} = R_{5,2} = 6$
$A^{\#}_{5,3}$
$A^{\#}_{5,4}$
$A^{\#}_{5,5}$
$A^{\#}_{5,6}$
$A^{\#}_{5,7}$
$A^{\#}_{5,8}$
$A^{\#}_{5,9}$
$A^{\#}_{5,10}$
$A^{\#}_{5,11}$
$R_{5,3} \cdots R_{5,11} = 7$
$A^{\#}_{5,12}$
ABLE TO MEDIATE: B_5
$R_{5,12} = 9$

Diagram 5

The values of R_{eh} are not necessarily unique. Thus, in Diagram 5 the maintenance costs, in arbitrary units, are

$$R_{1,1} = 3\,;$$
$$R_{2,1} = R_{3,1} = R_{4,1} = 5\,;$$
$$R_{5,1} = R_{5,2} = 6\,;$$
$$R_{5,3} = R_{5,4} = R_{5,5} = R_{5,6} = R_{5,7} = R_{5,8} = R_{5,9}$$
$$= R_{5,10} = R_{5,11} = 7\,;$$
$$R_{5,12} = 9.$$

It is clear that these structures can only exist if the money available is sufficient to supply their maintenance cost, that is, only if $U^* = R_{eh}$. In particular suppose that $R_2 > U^* > R_1 = R^*$. In this case, the coalition structure B_2 cannot be maintained. If U^* is decreased, superfluous connectivities necessarily decay, and $P(f = F)$ increases (the principal component being $p(f \subset b^* = F \subset B^*)$), as the difference $U^* - R^*$ is reduced. Indeed when $U^* = R_1 = R^*$, the $P(f = F) \to 1$. Since B^* is always achievable and is always the least costly coalition structure to maintain (the "coalitions" being the "players"), this result applies to all systems.

Restricted case

We shall now examine a more restricted case. We assume that some consistent activity amongst the players G_0^*, and that the specified G_0^* determines an essential game. In this case, if the players are maximizing their wealth, the activity must include correlated strategies, and thus a coalition structure B_0 must be mediated by some $A^\#(t_0)$. In other words the conditions select a particular subset of coalitions from the set of possible coalitions with $n = 3$ and to illustrate the point we shall assume that these are B_1, B_2, B_5. Further, in the simplest sense, which we shall assume for the moment, it is true that at any instant $t = t_0$ only one of the $A^\#_{eh} = b_{eh}$ can appear as a connectivity mediating B_e in the selected subset. Thus B_2 implies $A^\#_{2,1}$, which it does in any case, and B_5 implies only one of $A^\#_{5,1}$ ...... $A^\#_{1,3}$ say, $A^\#_{5,5}$.

In the upper part of Diagram 6 we show lines of constant maintenance cost in coordinates of U^* and t. In the lower part of Diagram 6 we show, in coordinates of $P(f = F)$ and t, the distribution obtained

— hypothetically — when the value of $\mathcal{R}$ is reduced slowly enough to ensure that the system reaches a stable state — if such exists — after each displacement. At the point $\boxed{\underline{a}}$ the coalition structure B_5 is realized using a connectivity $A^{\#}_{5,5}$ at a maintenance cost $R_{5,5}$. At $\boxed{\underline{b}}$ this maintenance cost is no longer available. The most costly structure which can exist between $\boxed{\underline{b}}$ and $\boxed{\underline{c}}$ is described

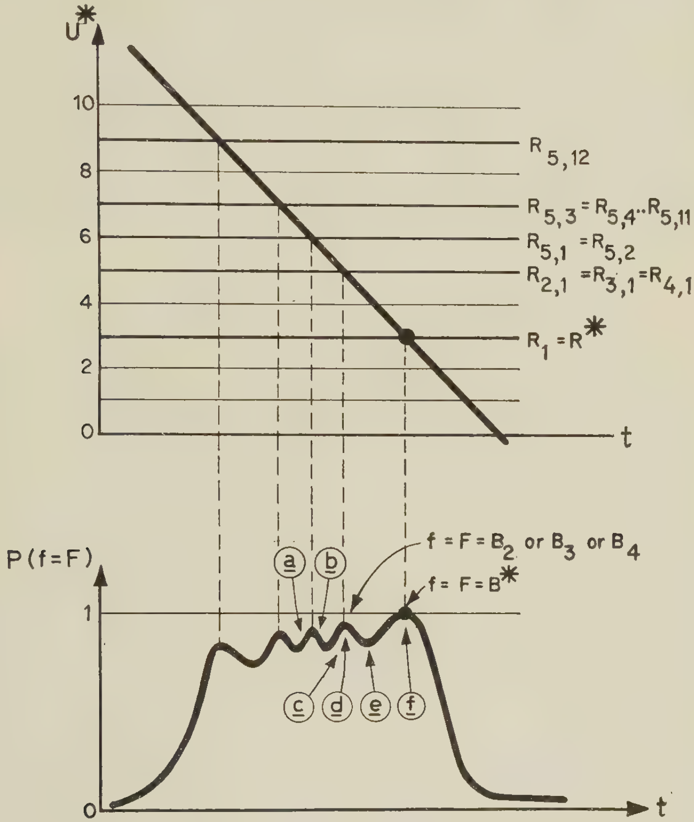


DIAGRAM 6

by $A^{\#}_{2,1}$ and will mediate the coalition structure B_2. But if the players use the money which is available for building connectivity — and, of course, they *need* not — there will be many superfluous connections and $P(f = F)$ will assume a minimum value. At $\boxed{\underline{d}}$ the su-

perfluous connections necessarily decay. There is just sufficient money available to meet the maintenance cost $R_{2,1}$. Thus $P(f = F)$ passes through a maximum as $U^* - R_{2,1}$ is reduced. Another minimum occurs at $\boxed{e}$ and the maximum achieved at $\boxed{f}$ is described by (23).

If U^* is increased as shown in Diagram 7 the change in $P(f = F)$ is different, due to the construction cost (shown as r_e in diagram) being, by definition, greater than the maintenance cost. The maxima in $P(f = F)$ will not appear until coalition structures have been built. That $r_e > R_e$ implies that we must pass over an expenditure hump, in order to create connectivity. Incidentally, in order to stabilize the system, so that $b_e \approx B_e$ with $P(f = F)$ at a maximum, $\mathcal{R}$ and thus U^* are initially increased, and play is allowed to proceed. Then, very slowly, U^* is reduced until the behavior appears consistent, a coalition structure is maintained, and state changes can be described as strategies of play.

Apparent mechanism of play

The monetary balance of the game appears to depend upon equilibrium between two tendencies. First of all, suppose that there is an achievable payoff function G^*_e (which the players know about, perhaps by previous experience of the outcomes) and that G^*_e determines an essential game. There will be a tendency for the players to spend money in acquiring the connectivity needed to mediate a coalition structure B_e (such that they can use the correlated strategies which maximize their payoff in G^*_e) and the representative point will, because of this, be apt to move upwards in the available money plane of Diagram 7. On the other hand, when — after spending at a rate greater than r_e in order to achieve some $A^{\#}_{eh}$ — the players have built up the required connectivity, it is reasonable to assume that they will seek the least expensive $A^{\#}_{eh}$ which will mediate B_e and, in general, there will be a tendency, because of this, for the representative point to move downwards in the available money plane of Diagram 7. It will, at any rate, descend lower, say to R_{e2}, depending upon whether or not these players can use $A^{\#}_{e2}$ to mediate B_e.

We shall later argue that this depends upon the learning capacity of the players, i.e., the more they learn, the less expensive the connectivity $A^{\#}_{eh}$ they need in order to mediate B_e, but we prefer

to explicate this point in connection with learning automata rather than experimental subjects.

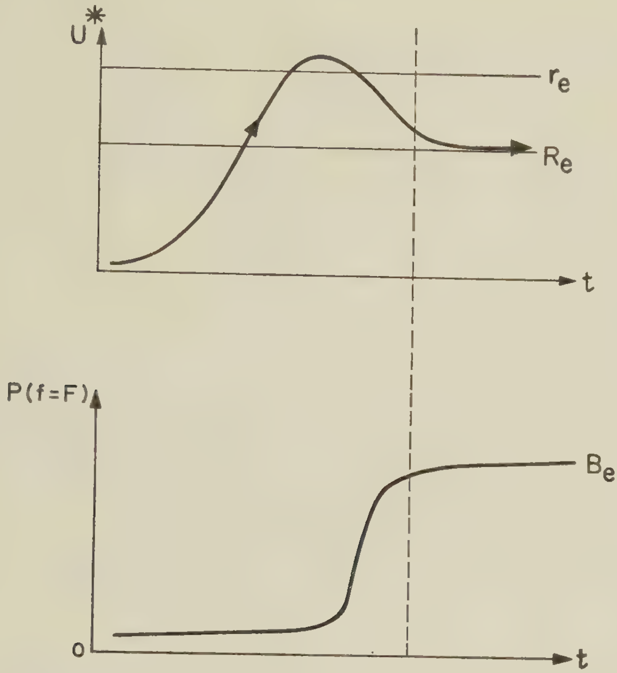


DIAGRAM 7

This picture represents our view about coalition structures in a simplified and largely qualitative manner. In conclusion we shall point out its chief defects, both of which will be rectified to some extent, in the later discussion.

(i) Usually more than one connectivity described by an $A^{\#}_{eh}$ will exist at each discrete value of R_{eh} and those which have similar or identical R tend to interact and give rise to hybrid coalition structures.

(ii) When the connectivity required to mediate a given coalition structure decays, the process is not necessarily uniform. Parts of it may persist, depending upon the inertial parameters and the precise underlying values of the c_{ij}. This inertia particularly affects the increase of U* from a low value, since pieces of connectivity may be retained from previous occasions upon which U* was high-valued.

Although we tacitly admit, in our description, that the system cannot help "remembering" or "retaining" some distortion characteristic of its previous states, the feature is apt to be obscured.

Decision rules and microscopic stability

We are now in a position to formalize our ideas about "that which competes" in the game, and to tackle the issue of "decision rules" (namely, to replace (9) and (10) by (11) and (12) whenever possible). For this purpose we shall adopt the concept of Ψ-stability advanced by Luce.

Briefly, Luce introduced the function Ψ to account for the social constraints which tend to preserve a structural "status quo" and which determine (whenever there is a structural change) those configurations which are admissible. Thus, if B_0 is a coalition structure existing at $t = t_0$ the set $\mathcal{B} = \Psi(B_0)$ and B_0^+, the coalition structure which actually occurs at $t = t_0 + \tau$ is included in $\mathcal{B}$. Whereas, in the original applications, Ψ could only be guessed at, we can, in the present system, evaluate Ψ from the parameters c_e, τ_0, and c^* of (3) and (4) and the communication cost parameters of (6) and (7).

The macroscopic picture which we have already discussed shows that money must be expended at a certain rate in order to maintain the physical connectivity needed to mediate a given coalition structure. We must now consider the distribution of the total expenditure and, in the process, characterize the stationary states of this system.

We start by assuming some G_0^* exists at $t = t_0$ such that it determines an essential game. In this case the players will use correlated strategies, i.e., for the coalition $F_i \subset B_0$

$$\sigma_{i0} = [(\xi_{kj}\eta_{kj})_{t_0}, \quad (\xi_{kj}\eta_{kj})_{t_0+\tau} \cdots (\xi_{kj}\eta_{kj})_{t_0+p\tau}]$$

each player k being included in some F_i.

We say that

$$\sigma_0, B_0 = \Big[\Big\{ (\sigma_{10}, F_{10}), (\sigma_{20}, F_{20}) \ldots (\sigma_{\omega 0}, F_{\omega 0}) \Big\}, B_0 \Big]$$

is Ψ stable with respect to G_0^* if the transformation into

$$\sigma_0^+, B_0^+ = \Big[\Big\} (\sigma_{10}^+, F_{10}^+), (\sigma_{20}^+, F_{20}^+) \ldots . (\sigma_{\Omega'0}, F_{\Omega'0}) \Big\}, B_0 \Big]$$

is not to the advantage of any player $k \subset F \subset B_0$ when

$$B_0^+ \subset \Psi(B_0) \tag{24}$$

In other words, recalling (18) and (19), the g_{i0}^* obtainable, given σ_0, B_0, are greater than the g_{i0}^* obtainable given σ_0^+, B_0^+, for all i and all $B_0^+ \subset \Psi(B_0)$.

Clearly, we can replace the vague term " activity " in (15) by the pair (σ_0, B_0), and write

$$[\sigma_0,\ B_0 \Longrightarrow \Lambda_0]$$

But, from (24), the pair (σ_0, B_0) can only exist if G_0^* exists, thus

$$\sigma_0,\ B_0 \Longrightarrow \Lambda_0 \subset \Lambda^*$$

Equally

$$G_0^* \Longrightarrow \sigma_0,\ B_0$$

Thus, in order to specify a stationary state of the system we must specify the entire interaction

$$\Longrightarrow\ \sigma_0 B_0 \Longrightarrow \Lambda_0 \subset \Lambda^* \Longrightarrow G_0^*\ \Longleftarrow$$

which we summarize by a triple such as

$$G_0^*, \sigma_0, B_0 \tag{25}$$

Of course, the stationary state is unlikely to persist indefinitely. It is metastable, rather than stable. The relations $G_0 \Longrightarrow \sigma_0 B_0$ and $\sigma_0 B_0 \Longrightarrow G_0$ are not arbitrary, although they are usually many to many. They are a shorthand expression for those inferences which can be made within the framework of the theory of games. Thus $G_0 \Longrightarrow$ expresses the set of payoff which can, according to the theory of games, exist for G_0 given the restrictions imposed by a specified Ψ and $\sigma_0 B_0 \Longrightarrow$ expresses the set of payoff functions which could, subject to the restrictions of a given M, sustain the rational activity σ_0 of players in the coalition structure B_0.

The relation $\Longrightarrow$ does depend for its validity upon the rational — though not necessarily avaricious — behavior of the players (the coalitions, only, must be avaricious). With real subjects, the validity of $\Longrightarrow$ must remain in doubt (though in learning automata we are on safer ground). But, in either case, if we *observe* a particular stationary state existing at $t = t_0$ we can replace $\Longrightarrow$ by the empirical implication $\rightarrow$ and infer rationality at $t = t_0$ from the existence of this state of affairs. In other words, while it does persist, an em-

pirically verified triple G_0, σ_0, B_0 describes a system which is closed with respect to decision making, that is, a system which has a finite and enumerable set of states, a subset of these being selected by the decisions which are made. It is thus legitimate (because of the closure) to assume that θ_i is negligible and to write decision rules for the coalitions (*not* for the original players, since *they* can no longer be regarded as competing with each other) which represent the origin of the correlated strategies. These decision rules will have the form

$$\Phi_{F_i} = \Phi_{1F_i},\ \Phi_{2F_i}$$

in which

$$\vec{\xi}_{F_iF_j} = \Phi_{1F_i}(\vec{U}_{F_i},\ X^{(F_i)}_{F_iF_j}) \tag{26}$$

and

$$\vec{\eta}_{F_iF_j} = \Phi_{2F_i}(\vec{U}_{F_i},\ X^{(F_i)}_{F_iF_j}) \tag{27}$$

which becomes analagous to (11) and (12) if we replace each single variable of a single player by the vector of variables which determine the moves of a correlated strategy. Indeed, the relations (11) and (12) are identical with (26) and (27) in the limit case when the coalition structure is B*.

Clearly this argument applies regardless of whether the decision makers are men or automata, providing that they compete for wealth and — in order to make the decision rule nontrivial — exhibit some measure of learning and memory.

Alternative approach to decision rules

Alternatively we can concentrate upon our choice of men as decision makers in the system, and argue that it is reasonable to write a decision rule to represent the strategy selection of a man *if* we are assured that his attention is fully occupied by playing the game for, in this case, we can take θ_i as negligible. The difficulty lies in saying when his attention *is* fully occupied.

We can, of course, ask each player, after an experiment, whether or not his attention was fully occupied. Indeed, we intend to do this, either directly or by an indirect test. But before we can interpret any strategic irregularities we have observed in the experiment by a " decision rule " assigned to each player, it is necessary to say what the enquiry, about attention being fully occupied,

means in terms of this system. In order to do this we must introduce a number of psychological terms.

There exists an upper limit to a man's decision making capacity which is uninfluenced by issues such as his sensory channel or his motor response inertia. The evidence in favor of such a limit stems from two main sources:

(i) Experiments in which a subject deliberately adapts himself to invariant input and output arrangements — by agreeing for example, to accept response alternatives as discrete categories — in which case it is possible to measure decision rates for different input loads [10, 11, 12, 13].

(ii) The common observation that even if a man is free to encode the data as he wishes — so that he can construct whatever perceptual categories he likes — there are still jobs which appear to overload his decision making capacity. In these conditions of free encoding as overload is approached, it seems reasonable to say that a man's attention is fully occupied [14, 15]. Similarly, we conceive that a man's attention must always be occupied by something, if not by a job then by his own silent thoughts. A typist, for example, is inadequately loaded — even when working at the mechanically maximum rate — and she attends to matters other than typewriting. If she can, she will chat to her colleagues, if not, she will daydream. But she must do one or the other for typing alone is too slight a problem. This notion, that man *must* make decisions about something, in order to *be* man is amply supported and leads one to pose a lower as well as an upper limit to the decision making capacity.

More accurately, perhaps, decisions must be made. But they may refer to internal, personal problems, which are inaccesible to an observer. Equally, of course, they may refer to external problems — exhibited in data which the observer can see for himself.

The whole gamut of social behavior, in particular, the nicely discriminated behavior of a conversation, leads us to believe that a man's attention will be fully occupied by his surroundings if

(1) he is provided with interaction channels having capacity in excess of his own maximum;

(2) there is some tangible incentive;

(3) the surroundings are adaptable and responsive so that their behavior is modified as a result of the previous interaction;

(4) the information about these surroundings becomes, due to their adaptation, encoded into the input channel in a way which suits the man [17].

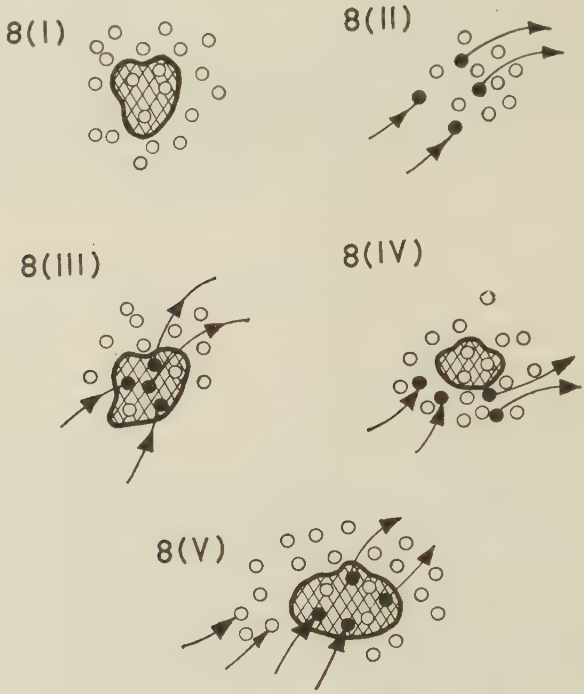


DIAGRAM 8 (i-v)

In the present system (1) is either satisfied or may be satisfied by dint of trivial modifications, (2) is satisfied if our basic assumption, that the players wish to maximize their wealth, is valid, and (3) and (4) are implicit in the character of the system. We shall interpret this psychological discussion in terms of a useful, but not too serious, pictorial analogy.

The anatomical entity which we call a player (in particular perhaps, his association cortex) is likened in Diagram 8 (i) to be a bag of potentially active computing elements. At any moment only a subset of these (the elements in the shaded area) are connectedly active and can be regarded as a coherent decision maker. In the convention of this picture the shaded area is a measure of the activity, and indirectly of the decision making capacity of the region.

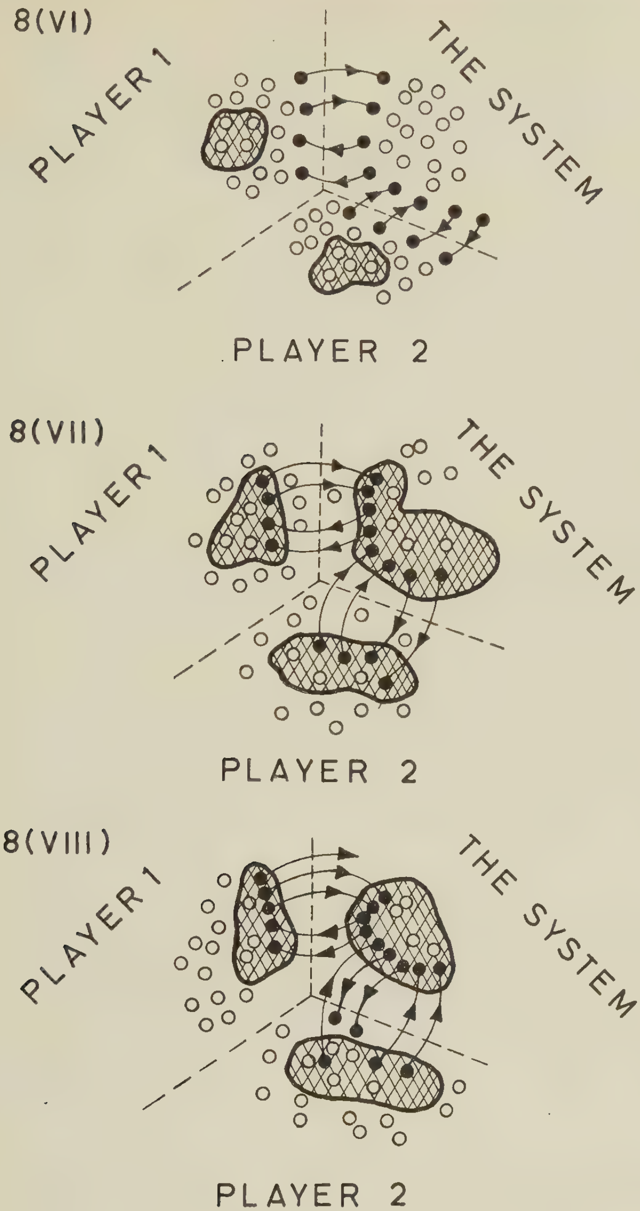


Diagram 8 (vi-viii)

The proposal that man as a *functional* entity exhibits a minimum decision making capacity is equivalent in this picture to the proposal that, at any instant, there must be a minimum shaded area within the bag representing an *anatomical* man.

A number of input and output connections have been introduced in Diagram 8 (ii), and it is possible to say whether the shaded region does, Diagram 8 (iii), or does not, Diagram 8 (iv), overlap with these connections. The former corresponds to the proposal that the man's attention is fully occupied by decisions related to the external world, the latter with the proposal that it is not, and the illustration of Diagram 8 (v) to the case of sensory overload.

Within this picture it is legitimate to represent the experimental system as a further bag of potentially active computing elements connected to the player bags through channels which convey moves and signals. Trading will give rise to connected regions (though the picture does not distinguish between monetary and signal interaction).

In the absence of interaction Diagram 8 (vi) pertains. In stable trading wa can be assured of the form in Diagram 8 (vii) since (by adjusting the parameters so that the possible coalitions are almost certainly active) the alternative form of Diagram 8 (viii) has a negligible chance of occurring.

We contend that the experimental system is so constructed that *if* stable trading occurs, it can be represented by a picture like Diagram 8 (vii). Further, *if* the condition of Diagram 8 (vii) pertains, we replace (9) and (10) by expressions such as (11) and (12) because the depicted system is, with respect to decision making, a closed one.

In such a system it is legitimate to describe the behavior of functional entities by a " decision rule ". The intriguing point is that, as a result of the interaction which took place to secure closure, the decision making entities are no longer the players. They are coalitions of players, linked together by constraints, which they themselves have built into the system.

(to follow)

Un procédé de mécanisation de la géométrie

par Maurice CARTON,

Docteur en Sciences Mathématiques,
Professeur à l'Institut Supérieur de Commerce Warocqué de Mons

CHAPITRE IV [1]

15) *Premier schéma d'une machine géométrique.*

Une machine, qu'elle soit mathématique ou cybernétique, ne peut agir que suivant les éléments de structure qui lui ont été fournis En particulier, la machine géométrique, telle que nous l'avons conçue au chapitre II, ne pourra baser son « raisonnement » que sur des configurations géométriques, configurations représentées pour la circonstance en matrices de perforations. Celles-ci traduisent, rappelons-le, d'une part, les postulats fondamentaux de la géométrie des intersections et, d'autre part, les hypothèses d'un problème posé, relatif à cette géométrie. Deux postulats fondamentaux ont été pris en considération pour la structure de cette première machine : l'un, le postulat de dilemme, est plutôt d'ordre négatif, en ce sens qu'il n'a d'autre but que de rechercher les configurations géométriquement impossibles de deux points appartenant simultanément à deux droites distinctes pour les signaler à l'opérateur, les interpréter ou les détruire suivant le cas comme nous aurons l'occasion de le voir au chapitre consacré au rôle de ce postulat dans les machines analytiques ; l'autre, le postulat de base, est essentiellement positif : se basant sur une distribution convenable d'un certain nombre de perforations dans une matrice, il en indique d'autres, à effectuer, pour que le théorème proposé soit démontré.

Ce procédé peut d'ailleurs être étendu, et, plutôt que de limiter le fonctionnement de la machine à l'indication des perforations à réaliser, on peut l'obliger à provoquer effectivement ces perforations

[1] La première partie de cet article a paru dans *Cybernetica*, vol. III, n° 2, 1960.

dans la matrice des hypothèses, laquelle, ainsi complétée, pourra, sous sa nouvelle forme, permettre l'établissement de nouveaux

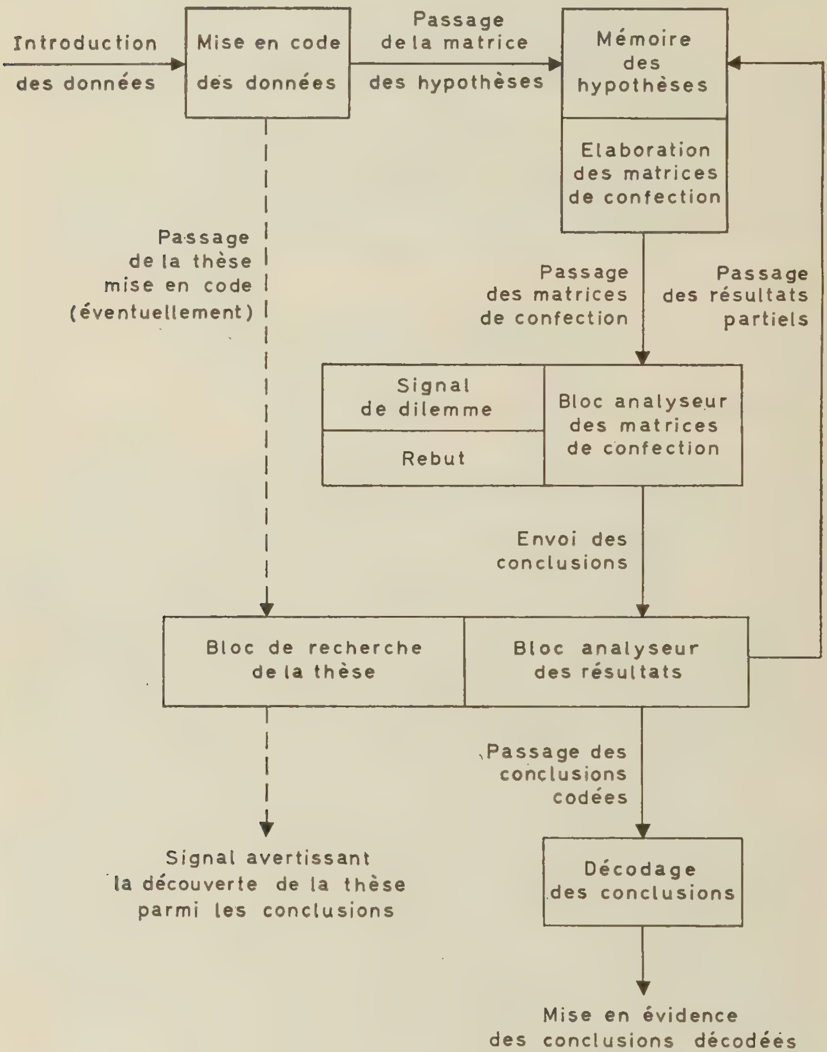


FIG. 26.

résultats éventuels. On voit ainsi se dégager un procédé en chaîne : sitôt un résultat établi, il est assimilé à une nouvelle hypothèse qui, en union avec les hypothèses précédentes, sera soumise à l'analyse.

La machine ainsi conçue peut être schématisée selon la figure 26.

Un problème (un théorème ou une proposition quelconque) étant énoncé, il convient tout d'abord de traduire les données en un langage spécial adapté à la machine et cela conformément aux procédés exposés au chapitre précédent : ce sera la mise en code du problème. Ce travail qui n'exige en aucune façon l'intervention du raisonnement pourra s'effectuer directement par l'opérateur lui-même ou tout au moins par un mécanisme indépendant de la machine proprement dite. La mise en code sera terminée lorsque toutes les données du problème seront interprétées univoquement par des perforations convenablement réparties dans un tableau rectangulaire divisé en colonnes suivant les éléments « points » et en lignes suivant les éléments « droites » : ce sera la matrice des hypothèses. Cette représentation matricielle n'est pas la seule valable, elle n'est d'ailleurs pas la plus simple au point de vue pratique ; nous ne l'utilisons, rappelons-le, que dans un but de compréhension du présent exposé.

Une fois élaborée, la matrice des hypothèses sera mise en mémoire et y demeurera jusqu'à établissement complet de la proposition ou effacement du problème par l'opérateur. La proposition à établir (la thèse du théorème ou la solution du problème) sera, s'il en est explicitement fait mention dans l'énoncé, également mise en code et introduite dans un bloc spécial (dénommé, sur le schéma, *bloc d'examen des résultats*) dont le rôle sera, comme son nom l'indique, d'examiner les résultats établis par la machine, afin d'en extraire la proposition demandée. On remarquera plus loin que si l'énoncé de la proposition ne fait pas explicitement mention d'un résultat bien particulier à établir, ce sont toutes les conséquences qu'il est logiquement possible de déduire des hypothèses de départ qui seront mises en évidence par le bloc « examen des résultats ». La machine jouera dans ce cas le rôle d'analyseur des hypothèses.

La matrice des hypothèses étant mise en mémoire, un organe spécial en extraira toutes les matrices de confection (matrices à 9 colonnes et 9 lignes) qu'il est possible de réaliser à l'aide des colonnes et des lignes de la matrice des hypothèses et les enverra successivement au *bloc analyseur*. Celui-ci, véritable cerveau de la machine, analysera toutes les matrices de confection au fur et à mesure qu'elles lui seront présentées et, suivant le résultat de l'examen qu'elle leur aura porté, les orientera vers l'une des trois directions reprises ci-après :

a) Vers un signal de dilemme qui renseignera l'opérateur sur l'existence d'une configuration de dilemme (configuration formée

de deux droites distinctes passant simultanément par deux points distincts) dans la matrice des hypothèses. Les éléments composant cette configuration de dilemme seront d'ailleurs mis en évidence.

b) Vers le bloc analyseur des résultats dans le cas où le bloc analyseur aura été mis en présence d'une matrice de confection identique à la matrice de base à une perforation près. Le bloc analyseur indiquera dans la matrice de confection l'emplacement de la perforation à effectuer pour que les deux matrices (de confection et de base) soient identiques. Le bloc « examen des résultats » stoppera la machine sitôt que la perforation répondant au problème sera découverte (dans le cas, du moins, où une thèse aura été introduite dans ce bloc car, dans le cas contraire, tous les résultats, quels qu'ils soient, seront mis en évidence).

c) Vers le rebut si l'une des deux configurations précitées n'a pas été constatée.

Dans le cas où l'emplacement de la perforation à effectuer, emplacement indiqué par le bloc analyseur et mis en évidence par le bloc « examen des résultats », ne répond pas au problème, la matrice de confection correspondante sera dirigée vers un *bloc perforateur des résultats partiels*, lequel réalisera effectivement cette perforation. La matrice de confection retournera dès lors, avec sa perforation supplémentaire, dans la première mémoire où elle ira compléter la matrice des hypothèses. Le circuit pourra ainsi recommencer, de nouvelles matrices de confection pouvant être élaborées par utilisation des perforations supplémentaires.

Si, sur la base des hypothèses posées, le processus décrit ci-dessus, ne permet pas d'établir une proposition reconnue comme vraie, la machine géométrique devra recourir aux constructions.

16) *Le principe des constructions.*

Nous avons vu au premier chapitre que certaines propositions de la géométrie des intersections exigeaient pour leur démonstration le recours à des constructions. Ainsi, le théorème de Desargues relatif aux triangles homologiques, théorème énoncé précédemment, ne peut être démontré par une machine dont le processus de démonstration se limiterait au processus décrit au paragraphe précédent : des constructions lui sont en effet nécessaires. Celles-ci sont de deux sortes :

— faire passer une droite par deux points distincts,
— déterminer l'intersection de deux droites distinctes.

Leur principe, on le voit, est très simple : il n'est en effet pas difficile d'imaginer un mécanisme permettant la construction automatique de ces points et droites.

Matriciellement, les constructions se feront de la manière suivante : si, par les points P et Q, on désire faire passer une droite, on ajoutera à la matrice des hypothèses une ligne supplémentaire que l'on perforera respectivement dans les cases correspondant aux colonnes de ces points P et Q ; si c'est un point d'intersection que l'on désire déterminer, on ajoutera cette fois une colonne à la matrice des hypothèses, colonne que l'on perforera aux intersections respectives des lignes horizontales correspondant aux droites dont on veut déterminer l'intersection. Dans le premier cas, la ligne ajoutée correspondra à la droite joignant les points P et Q ; dans le second, ce sera la colonne qui caractérisera le point d'intersection cherché.

Il est bien évident que pour qu'une droite puisse être tracée (ou un point d'intersection déterminé), il faut qu'elle le soit par deux points effectivement existants (ou par deux droites effectivement existantes) dans la matrice des hypothèses, celle-ci étant éventuellement complétée par certaines perforations provenant du bloc analyseur.

17) *Capacité d'une machine géométrique.*

Il résulte de ce qui précède, que si, dans une démonstration, les points par lesquels une droite est à tracer ou les droites à l'intersection desquelles un point est à établir peuvent être mis en évidence, il n'y aura aucune difficulté, comme nous l'avons dit, à réaliser matriciellement ces éléments. La machine possèdera en réserve des lignes et colonnes vierges de toute perforation. Pour les utiliser, elle les choisira d'une manière tout-à-fait arbitraire chaque fois qu'une construction sera à réaliser. Plus précisément, des lignes et colonnes « libres » seront prévues dans la matrice des hypothèses en vue de leur utilisation lors de constructions éventuelles. L'ordre de la matrice des hypothèses que la machine sera en mesure d'analyser pourra ainsi caractériser sa capacité. Celle-ci peut avoir une valeur fixe pour une machine déterminée. Supposons, pour éclaircir cette notion de capacité, qu'une machine soit prévue pour l'analyse de matrices d'hypothèses de 15 lignes et 15 colonnes maximum : la capacité de la machine sera de 15 lignes et 15 colonnes. Supposons de plus qu'une proposition géométrique dont l'énoncé emprunte 10 lignes et 12 colonnes lui soit posée. La machine possédant 5 lignes et 3 colonnes en réserve pour la construction, sera en mesure de tracer 5 droites supplémentaires et de déterminer 3 points d'inter-

section supplémentaires aux droites et points déjà existants. *La capacité constructive* de la machine serait de 5 droites et 3 points.

Si la mise en code de l'énoncé de la proposition exigeait la totalité des lignes et des colonnes de la matrice des hypothèses, il ne serait plus possible à la machine d'effectuer la moindre construction, les éléments (points et droites) de réserve lui faisant en effet défaut.

Si une machine voit sa capacité augmentée, non seulement elle sera en mesure d'emmagasiner des énoncés de théorèmes exigeant un nombre plus grand de points et droites, mais elle pourra également réserver un plus grand nombre de lignes et colonnes pour les instructions éventuelles. La capacité est donc une notion fondamentale pour la construction effective des machines géométriques. C'est d'elle que dépendra le nombre plus ou moins grand de propositions qu'elle pourra établir. Si une capacité infinie pouvait être imaginée, il n'y aurait pas de limite dans les possibilités constructives de la machine : toutes les propositions de la géométrie des intersections pourraient être démontrées mécaniquement. Mais cette hypothèse, dans la conception actuelle des machines géométriques, ne peut être admise et, par suite, toute machine aura une limitation dans ses possibilités, limitation exigée par sa capacité.

18) *Le problème de la détermination automatique de l'emplacement des constructions.*

Si, comme il a été montré dans les paragraphes précédents, la construction en elle-même n'offre aucune difficulté quant au tracé des droites passant par deux points ou à la détermination des points d'intersection de deux droites, il n'en est pas de même lorsque ces points, par lesquels une droite est à tracer ou ces droites dont le point d'intersection est à réaliser, sont inconnus. La machine est en effet en présence, dans la matrice des hypothèses, d'un nombre relativement grand de points non unis par une droite ou de droites dont l'intersection n'a pas été effectivement réalisée. Faire discerner par la machine les éléments points et droites à utiliser en vue de la construction, tel est le problème cybernétique des constructions géométriques. Nous allons voir comment ce problème peut être résolu avantageusement.

Un premier procédé, de principe très simple, peut être utilisé lorsque le nombre de points et droites de la matrice des hypothèses n'est pas trop élevé. Il consiste à faire tracer par la machine autant de droites qu'il y a de couples de points non encore unis par une droite et de faire effectuer l'intersection de tous les couples de droites n'ayant pas de points communs. Si ces constructions ne

peuvent suffire pour la démonstration automatique d'un théorème, l'opération sera recommencée, mais cette fois sur la configuration obtenue après la première application de l'opération constructive définie ci-dessus.

On constatera immédiatement que ce procédé exige de la machine une capacité constructive relativement grande.

Ainsi, une première opération constructive appliquée à l'énoncé du théorème de Desargues exigera de la machine une capacité totale de 25 points et 25 droites, alors que l'énoncé lui-même ne demande que 10 points et 10 droites. Un second tour de l'opération constructive fera intervenir un nombre encore plus grand de points et de droites.

De plus, ce procédé a le désavantage de construire des éléments qui seront parfaitement inutiles pour la démonstration d'un théorème. En somme, faute de pouvoir discerner la construction idéale à effectuer, la machine, en utilisant ce procédé, élaborera toutes les constructions qu'une proposition permet de réaliser.

Pour remédier à cet état de chose, un second procédé plus synthétique peut être utilisé. Pour celui-ci, la condition suivant laquelle deux points, pour qu'ils puissent former les éléments de base d'une construction, ne peuvent appartenir à une même droite, ne suffit plus : ces points doivent faire partie d'une configuration plus complexe. Celle-ci, qui peut d'ailleurs se présenter sous des formes diverses, devra par conséquent être constatée dans la matrice des hypothèses pour que la construction soit effective. Il en sera de même pour la construction de points d'intersection de droites.

Outre que le nombre de points et de droites nécessaires aux constructions sera sensiblement moindre, le danger que la machine établisse des propriétés correctes, bien entendu, mais étrangères aux hypothèses posées sera évité.

Mais de tous les procédés que l'on puisse expérimenter, le plus efficace sera, sans contredit, celui qui fera usage de postulats complémentaires. Ce procédé fera usage, pour les propositions relativement éloignées des axiomes de base, de théorèmes plus avancés, eux-mêmes établis à partir de ces mêmes axiomes. Un choix judicieux de ces théorèmes permet d'en limiter le nombre.

CHAPITRE V

19) *Les machines analytiques.*

Dans les chapitres précédents, nous avons admis qu'une configuration de dilemme (configuration formée de deux droites distinctes

passant simultanément par deux points distincts), si elle se présentait, n'était en droit d'être interprétée que par l'opérateur lui-même. La machine telle que nous l'avons envisagée, ne peut rien déduire d'une telle présence. Elle se contente de signaler la configuration à l'opérateur, lequel reste le seul accrédité à tirer les conséquences qui s'imposent. Ainsi, une configuration de dilemme peut se présenter lorsque l'opérateur, voulant déterminer le nombre de points d'intersection d'une droite avec une courbe algébrique particulière, aura imposé à la droite un nombre de points d'intersection supérieur au nombre logiquement possible. Devant cet état de chose, l'opérateur pourra conclure à l'absurdité de son hypothèse.

Pourtant il est des cas où la configuration de dilemme ne doit pas nécessairement se traduire par une impossibilité. C'est le cas notamment si la configuration provient, non pas des hypothèses de départ, comme c'est le cas de l'exemple ci-dessus, mais, par exemple, de l'une des opérations que voici :

— la mise en code automatique des données,
— les constructions,
— l'analyse elle-même.

Si l'on veut réaliser une machine entièrement automatique, il convient, évidemment, de la rendre apte à interpréter les configurations de dilemme pouvant se présenter dans de telles circonstances. Comment pourra-t-elle le faire ? Si deux droites ont simultanément deux points communs et si cette configuration n'est pas impossible, alors l'un des deux cas suivants doit être réalisé :

— ou bien les deux points sont distincts et les droites coïncident,
— ou bien ce sont les droites qui sont distinctes et les points qui coïncident.

En interprétant le dilemme successivement suivant chacune de ces deux voies, il pourra arriver à la machine d'établir deux propositions nettement différentes et dont l'une manifestement ne répondra pas au problème posé. Prenons un exemple. Soit à faire établir par la machine le théorème selon lequel les cordes d'intersection de trois circonférences sécantes prises deux à deux sont concourantes. Après certaines constructions effectuées par la machine elle-même, une configuration de dilemme se présentera dans la matrice des hypothèses. En suivant l'une des voies de l'interprétation du dilemme (coïncidence des deux points par exemple), la machine arrivera à établir la proposition demandée. En prenant l'autre

voie (coïncidence des deux droites), la machine ne pourra établir la concourance des droites d'intersection, mais arrivera à une toute autre proposition, à savoir, pour le cas précis qui nous occupe ici, mais qui permet de compléter le théorème, en disant que les cordes d'intersection de trois circonférences prises deux à deux ne sont concourantes que si celles-ci sont distinctes. Il convient de bien remarquer que cette interprétation du dilemme par la machine n'est pas erronée. Il est en effet évident que si les cordes d'intersection de trois circonférences prises deux à deux n'ont pas de point commun, ces circonférences ne peuvent que coïncider.

On voit ainsi se dessiner la méthode d'analyse de la machine géométrique. Mise en présence d'une matrice d'hypothèses, la machine détectera entre autre toutes les configurations de dilemme qui y seront présentes et analysera les conséquenses résultant de l'adoption de l'une ou l'autre voie de leur interprétation. Les résultats qu'elle pourra ainsi établir, correspondront à des théorèmes nettement et souvent intéressants. Un exemple. L'analyse par la machine, de la figure géométrique formée par trois triangles ayant les côtés homologues respectivement concourants mettra en évidence une configuration de dilemme. Interprétée, celle-ci concluera au théorème de Desargues dans un cas et au fameux théorème de l'unicité de la projectivité dans l'autre.

Il peut aussi arriver qu'une même configuration de départ révèle au cours de son analyse automatique, non pas une seule configuration de dilemme, mais plusieurs. L'interprétation suivant les différentes combinaisons possibles des cas pouvant se présenter conduira à l'établissement de toute une « collection » de propositions ou théorèmes. La machine aura, dans ce cas, complètement analysé un ensemble d'hypothèses posées a priori. Son rôle aura été analytique au sens propre du terme.

CHAPITRE VI

20) *La mise en code automatique des hypothèses d'un problème géométrique.*

Comme nous l'avons vu, la mise en code consiste à ramener toutes les propositions possibles de la géométrie des intersections à des configurations de points et de droites. Ce travail n'exige pas l'intervention du raisonnement. Toutefois, comme aucune confusion d'interprétation ne peut être admise dans la mise en code, les configurations de dilemme éventuelles surgissant durant cette opération

devront obligatoirement être interprétées de telle sorte qu'elles répondent à l'*énoncé* du problème. Si, par exemple, nous demandons à la machine de rendre deux droites orthogonales, elle recherchera leur intersection. Or, si celle-ci est déjà existante, la machine sera en possession de deux droites ayant deux points d'intersection. Devant ce dilemme, la machine n'aura pas à choisir : ce sont en effet les deux points d'intersection qui doivent coïncider, et non les droites. Orienter la machine sur la voie correcte dans l'interprétation de ces dilemmes, tel est le problème de la mise en code.

Une première méthode de résolution, d'ailleurs relativement simple, est d'attribuer une importance de priorité aux éléments, points et droites, introduits en premier lieu dans la machine. Ainsi, pour la configuration de dilemme, les deux points seront considérés comme distincts s'ils ont été introduits dans la machine *avant* les droites auquelles on les fait appartenir. Celles-ci seraient alors automatiquement mises en coïncidence par la machine elle-même. Dans le cas contraire, ce serait les points qui seraient considérés comme confondus et les droites qui seraient distinctes. Pratiquement, lorsque l'opérateur exigera le tracé d'une droite par la machine, celle-ci n'exécutera cet ordre qu'après s'être assuré que cette droite n'est pas déjà tracée. Dans le cas contraire, l'ordre resterait sans suite.

Hélas, ce procédé ne peut être étendu à tous les problèmes qu'une machine géométrique doit être en mesure de résoudre. Il n'est en effet pas toujours possible de ranger dans un ordre chronologique les éléments d'une proposition. Aussi, une méthode plus complexe est-elle nécessaire. Celle-ci consiste à faire appel à des notions de « distinction » et de « séparation » dont la théorie ne peut être exposée ici. Signalons simplement que ces notions sont attribuées aux éléments points et droites au moment de leur introduction dans la machine et qu'elles satisfont à certains postulats. Ainsi, deux points distincts sont dits unis par une relation de distinction ; un point hors d'une droite est dit uni à la droite par une relation de séparation. De ces définitions résulte entre autre le postulat suivant que nous donnons à titre d'exemple : si un point est uni à une droite par une relation de séparation, il est uni aux points de la droite par des relations de distinction. [1]

[1] On trouvera la liste complète de ces axiomes dans mon article *Essai d'une mécanisation de la géométrie,* Bulletin Scientifique de l'Institut Supérieur de Commerce de la Province de Hainaut, Tome IV, 1956, N° 3-4, Fondation Raoul Warocqué, Mons.

CONCLUSION

Nous terminerons ici notre exposé sur la mécanisation de la géométrie. Il reste beaucoup à faire dans ce domaine notamment en ce qui concerne les géométries ordonnées (rappelons, en effet, que nous n'avons vu aucun postulat relatif à l'ordre des points sur une droite et que, par conséquent, la géométrie des intersections ne permet pas de discerner dans une courbe du second degré, l'ellipse de l'hyperbole) et les géométries spatiales et hyperspatiales. Mais nous ne voulons pas anticiper et nous nous limiterons ainsi à quelques considérations.

Et tout d'abord, est-il possible de résoudre des problèmes de géométrie par l'emploi des ordinatrices ? Conformément aux principes exposés dans cet article, oui, mais ce serait très long par le fait même que cette machine n'effectue qu'une seule opération à la fois. Pour résoudre mécaniquement un problème de géométrie, il est en effet beaucoup plus avantageux d'entamer la démonstration par plusieurs côtés à la fois, car c'est du croisement des chemins suivis que résulte la solution. Une ordinatrice exigerait un examen continuel de tout ce qu'elle aurait pu préalablement établir. Un exemple simple mettra ce point en évidence : le choix d'une droite passant par deux points qui, pour une machine appropriée à la géométrie demanderait un laps de temps correspondant à la fermeture d'un seul relais électromagnétique, exigerait d'une ordinatrice une série de 116.640 opérations simples pour une capacité de 18 points et 18 droites. De plus dans cette éventualité, ce nombre d'opérations augmenterait proportionnellement au cube de la capacité ce qui ne serait pas le cas pour une machine géométrique.

Un autre point important est le problème relatif au temps que mettrait une machine pour résoudre un problème de géométrie. Pour une machine qui serait complètement commandée par une génératrice d'impulsions, nous avons pu montrer que pour une capacité de 15 points et 15 droites, capacité suffisante pour de nombreux problèmes, le nombre d'impulsions nécessaires à la démonstration du théorème le plus compliqué, dans le cas le plus désavantageux, était de 27.600 environ.

On le voit, la machine géométrique est, dès à présent, dans le domaine de la réalisation.

CYBERNETICA (Namur)
Vol III — N° 4 — 1960